Versuch
in
socratischen Gesprächen
über die
wichtigsten Gegenstände
der
ebenen Geometrie

R

von

Johann Andreas Christian Michelsen
Professor am Berlinschen Gymnasium.

J. H. A. Scholler

Berlin
bey Siegismund Friedrich Hesse,
in der breiten Straße.
1781.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Die folgenden Gespräche sind größtentheils so, wie sie da stehen, mit Kindern, die noch gar nicht in der Mathematic unterrichtet waren, gehalten worden. Mehrere mir sehr verehrungswürdige Männer, die Augenzeugen von dem Erfolge gewesen, mit welchem ich dergleichen Unterredungen über die ganze ebene Geometrie mit Kindern angestellet habe, haben mich zu ihrer Herausgabe ermuntert. Des gedachten Erfolgs aber ohnerachtet weiß ich nicht, ob meine Folgsamkeit gebilliget werden wird. Ton und Mienen lassen sich nicht beschreiben, und wie sehr kommts auf sie an? Ueberdem wer kann dergleichen Gespräche ohne alle Veränderung hinterher aufsetzen? Einem Versuche verzeiht man indeß leicht, und den meinigen werden, wenn er auch Versuch

im

im eigentlichsten Verstande seyn sollte, doch Anfänger in der Geometrie vielleicht nicht ohne allen Nutzen lesen, zumal wenn er vom Lehrer ihnen zuvor vorgelesen würde. Socratisch habe ich die Gespräche genannt, weil darin oft der Lehrling so geleitet wird, daß er das zu lernende selbst findet, ich weiß aber sehr wohl, wie viel ihnen fehlt, um diese Benennung ganz zu verdienen. Sollte es nach diesem Versuche der Mühe werth gehalten werden, so entschlösse ich mich vielleicht, die ganze ebene Geometrie auf eine ähnliche Art abzuhandeln, doch so, daß ich von mehrern ähnlichen Fällen jedesmal nur Eine vollständige Unterredung mittheilte, und in Ansehung der übrigen es bey einer Beschreibung des genommenen Weges bewenden liesse. Hielte man nemlich diese Arbeit für nüzlich, so wünschte ich nüzlich zu werden, ohne durch übertriebene Weitläuftigkeit ekelhaft zu seyn. Berlin, den 3ten May, 1781.

Auf der 2ten Kupfertafel muß Fig. 48. anstatt C, B, und anstatt F, C gelesen werden.

Erstes Gespräch.

S. Ist denn das wirklich wahr, daß man wissen kann, wie hoch ein Thurm ist, ohne denselben zu messen? Ich kann ja nicht einmal wissen, wie hoch unsere Stube ist, wenn ich sie nicht messe.

L. Also würden Sie mir wohl noch weniger glauben, wenn ich sagte, daß man so gar wissen könne, wie hoch von uns bis zur Sonne ist?

S. Das ist ja gar nicht möglich.

L. Gar nicht möglich? Als Sie noch nicht angefangen hatten, auf dem Claviere spielen zu lernen, und auch im Anfange, da Sie es lernten, schien Ihnen das ganz unmöglich, daß man vom Blatte spielen könnte. Scheint es Ihnen noch unmöglich?

S. Das ist auch etwas ganz anderes.

L. Das ist es freylich. Aber warum hielten Sie es sonst für unmöglich vom Blatte zu spielen? Nicht wahr, weil Sie noch keine Kenntniß vom Clavierspielen hatten? Eben so geht es

Ihnen jezt. Da Sie noch keine Mathematic gelernt haben; so können Sie Sich freylich noch nicht vorstellen, wie man wissen könne, wie hoch ein Thurm, oder wie weit die Sonne von uns sey, ohne daß man den Thurm, und den Weg von uns bis zur Sonne messe: aber mit der Zeit werden Sie dies und sogar noch viel schwerere Dinge lernen.

S. Aber wie macht man es denn, daß man weiß, wie hoch ein Thurm ist, wenn man ihn nicht mißt?

L. Ich könnte Ihnen das Verfahren dabey wohl beschreiben, aber Sie würden mich nicht verstehen, denn es gehören dazu manche Kenntnisse, die Sie noch nicht haben.

S. Ich möchte es gar zu gerne wissen.

L. Dazu kann ich Ihnen keinen bessern Rath geben, als daß Sie recht eifrig die Mathematic zu lernen suchen, wenn Sie darin werden unterrichtet werden. Wenn Sie dann eben so fleißig seyn werden, als Sie in dem, worin ich Sie bis jezt unterrichtet habe, gewesen sind, so werden Sie, wie ich schon gesagt habe, mit der Zeit noch viel wichtigere Dinge lernen.

S. Mit der Zeit sagen Sie? Also wird es wohl lange dauren?

L. Es wird Ihnen in der Mathematic gehen, wie beym Clavierspielen. Sie mußten da erst die Claves kennen lernen, dann die Noten, mußten geübt werden, einzelne Noten anfänglich auf dem Claviere sogleich anschlagen zu kön-

können, dann mehrere, aber wenige, mit einemmale sich vorzustellen. Darauf lernten Sie beyde Hände zugleich gebrauchen, man unterrichtete Sie in der Art die Finger zu setzen, und nachdem man Sie so eine Zeitlang mit lauter kurzen Sätzen beschäftiget und darin geübt hatte, legte man Ihnen ganze Stücke, aber kleine vor. Durch häufige Uebung bekamen Sie eins nach dem andern in Ihre Gewalt, und jezt haben Sie bey weiten so viel Zeit nicht mehr nöthig, ein Stück zu lernen, als im Anfange. Die Stücke, welche man Ihnen gab, wurden auch auch von Zeit zu Zeit schwerer, aber Sie müssen Sich doch noch viel und lange üben, ehe Sie vom Blatte werden spielen können. So viel Zeit, Fleiß und Uebung nöthig ist, um auf dem Claviere, insbesondere vom Blatte, zu spielen, eben so viel ist nöthig, wenn man in der Mathematic so weit kommen will, daß man davon Gebrauch machen könne. Werden Sie dazu wohl Lust haben?

S. Das soll mich nicht abhalten, wenn ich sie nur lerne. Wenn Sie mir aber jezt nur sagen könnten, wie man erfährt, wie hoch ein Thurm ist, ohne ihn zu messen.

L. Stellen Sie sich einmal vor, daß Sie noch keinen Buchstaben kennten, und mich fragten, wie man es machte, wenn man läse? Würde ich Ihnen das wohl durch eine Beschreibung deutlich machen können? Es giebt auch in der Mathematic ein A, B, C. Wenn man das

gelernt hat, dann kommt man zum Buchstabiren; aber auch hierin muß man erst eine Fertigkeit haben, ehe man zum Lesen fortschreiten kann. Bis dahin müssen Sie nun erst gekommen seyn, wenn das, was ich Ihnen sagen könnte, verständlich seyn soll. Ich kann Ihnen also jezt Ihre Frage nicht beantworten, aber dagegen will ich, wenn Sie Lust dazu haben, den Anfang mit dem mathematischen A, B, C, machen.

S. O ja! Ich will mir recht Mühe geben, daß ich bald ans Buchstabiren und Lesen komme.

L. Ich zweifle gar nicht, daß Sie Ihr Wort halten werden, denn Sie haben es ja in andern Dingen immer gethan. Aber warnen muß ich Sie doch zum voraus, und zwar vor der Mathematic selbst.

S. Vor der Mathematic selbst? Ich denke, ich soll den Anfang machen, sie zu lernen?

L. Ja das sollen Sie; aber eben deswegen muß ich Sie warnen

S. Wie denn so?

L. Die Mathematic enthält eine Menge höchst brauchbarer und wichtiger Kenntnisse, und mit diesen Schätzen überhäuft sie den, den sie einmal lieb gewonnen, je länger je mehr, ohne gleichwohl sich je zu erschöpfen. Daher kann man auch, so bald man unter die Lieblinge der Mathematic aufgenommen ist, diese Wissenschaft nie aufhören zu rühmen und zu lieben. Aber die Mathematic nimmt nicht einen jeden so gleich unter ihre Lieblinge auf; wenn man dazu ge-

gelangen will, muß man zuvor eine Probezeit ausstehen. So lange diese Probezeit dauert, ist das, was man von der Mathematic erhält, wenig, ohne Reiz, und scheinet oft sehr unwichtig. Achtet nun jemand das nicht, so verschließt die Mathematic ihre Schätze für ihn, und bestraft ihn mit Unwissenheit in den wichtigsten Dingen, und so gar mit Unlust, dieselben zu lernen. Wer aber vom Anfang an das wenige, was die Mathematic ihm giebt, dankbar annimmt und sorgfältig in seiner Seele verwahrt, und immer nach mehrern sich sehnt, dem zeigt sie sich nachher auch in ihrer ganzen Schönheit und Vortreflichkeit, und setzt ihn in den Stand, Dinge einzusehen, deren Kenntniß den Menschen weit über andere erhebt, und eine Quelle der größten Vortheile ist.

S. Es ist mir lieb, daß Sie mir dies gesagt haben. Ich will auf alles, was Sie mir von der Mathematic sagen werden, so aufmerksam seyn, als ich nur kann, und es dann recht oft wieder überdenken, daß ich es auch behalte.

L. Nun gut. Heute wollen wir also von den Linien mit einander reden, und sehen, was wir uns unter einer Linie zu denken haben.

S. Sollte ich denn das nicht schon wissen? Ich habe ja selbst schon viele Linien, gerade und krumme, gemacht.

L. Ganz unbekannt sind Ihnen freylich die Linien nicht. Aber können Sie mir auch wohl

mit Worten beschreiben, was Sie Sich unter einer Linie denken?

S. (Nach einigem Nachdenken) Nein, das kann ich doch nicht.

L. Ein Kind wird einmal gefragt, was wohl eine Linie sey? Nun steht eine an der Tafel gezeichnet. Es zeigt also dahin, und sagt: das ist eine Linie. War das recht?

S. (Lächelnd) Nein!

L. Das heißt eine Linie zeigen, aber nicht, eine Linie mit Worten beschreiben. So konnten Sie es nun wohl nicht machen, denn Sie sind schon weiter, als dies Kind. Allein beschreiben können Sie die Linie doch auch noch nicht. Sagen Sie mir also, können Sie Sich wohl eine Linie vorstellen, ohne sich dabey eine Länge oder etwas langes zu denken?

S. Nein.

L. Was gehört also nothwendig zu einer Linie?

S. Eine Länge.

L. Recht. — Müssen Sie Sich nicht aber auch, wenn Sie eine Länge Sich vorstellen wollen, eine Breite denken?

S. O ja! Wie könnte ich mir eine Länge ohne Breite denken? Wenn ich mir zum gerade Schreiben auch noch so feine Linien ziehe, so haben sie doch immer noch einige Dicke, oder ich würde sie ja gar nicht sehen können.

L. Alles das, was wir lang nennen, hat allerdings auch seine Breite, wenn dieselbe auch noch

noch so gering seyn sollte, und die Linien, von welchen Sie sprechen, haben dergleichen ebenfalls. Aber geht es nicht an, daß ich z. B. bey einem Faden Zwirn bloß untersuche, wie lang er sey, ohne auf seine Dicke zu sehen?

S. O ja!

L. Und wenn ich nun das thue, stelle ich mir dann bloß eine Länge, oder eine Länge und Breite zugleich vor?

S. Da stelle ich mir freylich eine Länge und keine Breite vor.

L. Wenigstens betrachtet man dieselbe nicht aufmerksam, und es ist uns gleichviel, wie breit das sey, dessen Länge wir nur wissen wollen. Wir betrachten aber sehr häufig bloß die Länge eines Dinges. Z. B. wenn ich untersuche, wie hoch ein Thurm ist, oder ein Berg, oder wie weit eine Stadt von der andern, oder auch, wie groß ein Mensch ist. Ja man darf bisweilen gar nicht auf die Breite sehen, z. B. wenn man gefragt wird, wie lang eine Strasse sey. Wenn man da antworten wollte, 100 Schritt lang und 8 Schritt breit, so wäre das lezte ja ganz überflüßig, und man könnte wohl ausgelacht werden. Dasjenige nun, was Sie Sich denken, wenn Sie Sich die Höhe eines Thurms oder eines Berges, oder die Länge eines Weges, oder die Größe eines Menschen vorstellen, das ist eine Linie. Ist das nun eine Länge und Breite, oder eine Länge ohne Breite?

S. Eine Länge ohne Breite

L. Und was ist also eine Linie?

S. Ach! eine Länge ohne Breite.

L. Das suchen Sie nun zu behalten, und merken Sie Sich, daß Sie, so oft von einer Linie gesprochen wird, bloß auf die Länge zu sehen haben. — — Sind denn nun aber die Linien, die Sie ziehen, auch bloß Längen ohne Breite oder Linien im strengsten Verstande?

S. Nein, denn sie haben zugleich Breite.

L. Aber gesetzt, daß wir uns auf einer Tafel eine Linie im strengsten Verstande denken wollten, könnte da eine Linie, so wie wir sie ziehen können, nicht bequem uns den Ort anzeigen, wo dieselbe gedacht werden sollte?

S. Ja.

L. Als Zeichen von den Linien, so wie ich sie erklärt habe, wollen wir künftig auch wirklich gezogene Linien oft gebrauchen. Bisweilen werden sie ziemlich breit seyn, zumal, wenn wir mit Kreide auf einer hölzernen Tafel dergleichen ziehen, indeß wissen Sie nun schon, daß Sie, wenn Sie Sich darunter Linien denken sollen, auf die Breite derselben gar nicht sehen müssen, und auch dies müssen Sie nicht vergessen.

S. Wenn ich es ja bisweilen vergessen sollte, so seyn Sie doch so gütig und erinnern Sie mich daran, damit ichs nicht mit der Mathematic verderbe.

L. So viel, als ich kann, will ich schon suchen, daß es nichts zu bedeuten habe. — —

Aber wieder auf die Linien zu kommen, wie viel Arten von Linien sind Ihnen bekannt?

S. Zwey. Gerade Linien und krumme Linien.

L. Die kennen Sie wohl schon genau genug?

S. (Nach einigem Nachdenken) Wenn ich Linien sehe, so kann ich wohl sagen, welche gerade und welche krumm sind; aber wenn mich jemand fragte, was eine gerade Linie und was eine krumme sey, so würde ichs nicht wissen, so wie ich vorher nicht wußte, wie ich eine Linie, ohne darauf zu sehen, ob sie gerade oder krumm sey, beschreiben sollte.

L. Sie beweisen durch diese Antwort, daß Sie aus meinem vorhergehenden Gespräche mit Ihnen Nutzen gezogen haben. Wenn ich das oft bemerken werde, so wird es meine liebste Beschäftigung seyn, mich mit Ihnen über Mathematic zu unterreden. Sie wissen also nicht, was eine gerade und was eine krumme Linie ist; wie nun, wenn auch ichs nicht wüßte?

S. (Sieht den Lehrer lächelnd an)

L. Betrachten Sie doch einmal die Linien Fig. 1, 2, 3 und 4; welche sind darunter gerade, und welche krumm?

S. Die erste und dritte Linie sind gerade und die zweyte und vierte sind krumm.

L. Sind die beyden geraden Linien nicht von einander unterschieden?

S. Ja, die erste ist kleiner, als die dritte.

L. Sonst nicht?

S. Ja!

S. Ja, die erste steht oben und die dritte unten.

L. Wenn Sie nun die Tafel umkehren, wie stehn dann die Linien.

S. Die dritte steht nun unten und die erste oben.

L. Aber es sind doch noch eben die Linien, die sie vorher waren?

S. Ja.

L. Sind also die gedachten geraden Linien dadurch, daß die eine oben und die andere unten steht, selbst von einander verschieden?

S. Nein.

L. Dieser Unterschied betrift nicht die Linien selbst, sondern ihren Ort. Wenn ich gefragt hätte, wie die gedachten Linien in Ansehung ihres Orts verschieden wären; so wäre ihre Antwort recht gewesen, so aber nicht. Finden Sie also außer der Größe noch einen Unterschied zwischen der ersten und dritten Linie?

S. Nein.

L. Nun betrachten Sie die beyden krummen Linien Fig. 2 und 4, und sagen Sie mir, wie diese verschieden sind?

S. Die zweyte ist auch kleiner als die vierte.

L. Nicht sonst noch?

S. Ja, die zweyte ist auch krummer als die vierte.

L. Worin sind also die geraden Linien nur unterschieden?

S. Bloß in der Größe.

L. Und

L. Und wie könnte man daher wohl die geraden Linien beschreiben?

S. Durch Linien, die bloß in der Größe verschieden sind.

L. Was ist aber nun Eine gerade Linie?

S. Eine Linie, die — — — da kann ich aber doch nicht sagen, bloß in der Größe verschieden ist?

L. Das geht freylich nicht. Wenn von einer Linie die Rede ist, so müssen Sie sich anders erklären. Gesetzt also, daß Sie eine gerade Linie in Theile theilen, wie z. B. die fünfte Linie bey den Buchstaben c und d getheilt ist, was sind die Theile?

S. Ebenfalls gerade Linien.

L. Und worin sind dieselben von der ganzen Linie unterschieden.

S. Bloß in Ansehung der Größe.

L. Sollten Sie nun wohl die gerade Linie beschreiben können?

S. Etwa durch eine Linie, deren Theile von der ganzen Linie blos in der Größe verschieden sind?

L. Ganz recht. Indeß wollen wir doch die geraden Linien auch noch von einer andern Seite betrachten. Was meint Ihr Schreibmeister, wenn er bisweilen sagt: Sie schreiben heute sehr krumm?

S. Daß ich bald hinauf und bald herunter gehe.

L. Und wenn schreiben Sie gerade?

S. Wenn

S. Wenn ich das nicht thue.

L. Wie machen Sie es denn, wenn Sie recht gerade schreiben wollen?

S. Ich sehe immer nach dem Punkte, den mein Schreibmeister am Ende der Zeile gemacht hat, und suche, daß alle Buchstaben nach ihm hingehen.

L. Und wo müssen also alle Buchstaben hingerichtet seyn, wenn die Zeile gerade seyn soll?

S. Nach dem Punkte am Ende.

L. Nach vielen?

S. Nein, nach einem.

L. Sollte es vielleicht bey einer geraden Linie auch so seyn?

S. Ach ja! die ist auch nur nach einem Orte hingerichtet.

L. Und was wäre also eine gerade Linie?

S. Eine Linie, die nur nach einem Orte hingerichtet ist.

L. Das druckt man auch so aus: Eine gerade Linie ist eine Linie, die ihre Richtung nicht verändert. Und nun sagen Sie mir auf diese Art noch einmal, was Sie unter einer geraden Linie verstehen?

S. Eine Linie, die ihre Richtung nicht verändert.

L. Gut! Diese Beschreibung wollen wir uns nun eben so, als die vorhergehende merken. — — Sagen Sie mir aber ferner, was Fig. 6, für eine Linie steht?

S. Eine

S. Eine gerade ist es nicht, aber krumm kann ich sie doch auch nicht nennen.

L. Das ist ganz recht. Warum ist sie keine gerade Linie?

S. Weil sie ihre Richtung oft verändert. Sie geht bald hinauf, bald herunter.

L. Warum wollen Sie sie aber nicht eine krumme Linie nennen? Muß denn nicht, wenn eine gerade Linie diejenige genennt wird, die ihre Richtung nicht verändert, eine jede Linie, die ihre Richtung verändert krumm seyn?

S. Die krummen Linien Fig. 2, und 4, verändern freylich ihre Richtung, und ich nenne sie auch deswegen krumm; allein die Linie Fig. 6, ist erst gerade, dann ändert sie ihre Richtung, dann geht sie wieder eine Ecke gerade fort, dann ändert sie wieder ihre Richtung, das geht so ruckweise.

L. Ist das bey den genannten krummen Linien nicht so?

S. Nein, da ändert sich die Richtung allmählich.

L. Was heißt das allmählich?

S. Es ist da nicht erst ein Theil gerade und dann ändert sich die Richtung, sondern sie ändert sich schon vom Anfang an und immer fort.

L. Wie lange bleibt denn also wohl die Richtung bey einer krummen Linie einerley?

S. Gar nicht, sondern sie ändert sich alle Augenblicke.

L. Giebt

L. Giebt es also keinen Theil in einer krummen Linie, der gerade wäre?

S. Nein.

L. Was ist also nun eine krumme Linie?

S. Eine Linie, die ihre Richtung alle Augenblicke verändert.

L. Können Sie das nicht noch auf eine andere Art sagen?

S. O ja! Eine Linie, worin kein Theil gerade ist.

L. Nun das geht recht gut. Sie wissen doch nun schon was eine gerade und was eine krumme Linie ist. Nun soll Sie auch die Linie Fig. 6, nicht länger aufhalten. Betrachten Sie sie nur noch einmal. Ist es eigentlich eine, oder mehrere Linien?

S. Ach ja! es sind mehrere an einander gesetzte.

L. Wenn man dergleichen Linien als eine betrachtet, so nennt man sie zusammengesetzte, und Fig. 7, und 8, stehen noch ein Paar andere Arten. Können Sie wohl alle drey Arten beschreiben.

S. Die Linie, Fig. 6, ist aus lauter geraden Linien, die, Fig. 7, aus lauter krummen, und die, Fig. 8, aus geraden und krummen zusammengesetzt.

L. Könnte es nicht noch mehr Arten von zusammengesetzten Linien geben?

S. Nein.

L. Wenn

L. Wenn nun diese Linien zusammengesezte heißen, wie meinen Sie wohl, daß wir die vorhin betrachteten Fig. 1, 2, 3, 4, 5, nennen könnten?

S. Einfache.

L. Wie viel Arten giebt es deren?

S. Nur zwey; gerade und krumme.

L. Nun noch eins. Was finden Sie bey den Linien Fig. 9 und 10.

S. Es stehen Buchstaben dabey.

L. Von diesen Buchstaben will ich Ihnen nur noch sagen, daß man darnach die Linien benennt. Die Linie Fig. 9. z. B. heißt die Linie ab, und die Linie Fig. 10. die Linie cde. Man kann dazu Buchstaben wählen, welche man will; indeß nimmt man sie doch gerne, wenn man mehrere gebraucht, so wie sie im Alphabete folgen. Außerdem schreibt man sie von der Linken zur Rechten und von oben nach unten zu. Bey geraden Linien setzt man gewöhnlich an jedes Ende einen Buchstaben, bey krummen aber setzt man überdem noch einen oder mehrere in die Mitte. Bisweilen gebraucht man auch nur einen Buchstaben, wie Fig. 11 und 12, der dann zu Anfange oder in der Mitte steht. So viel für heute, morgen vielleicht etwas mehreres. Da Sie so aufmerksam gewesen sind, so werden Sie wohl von dem Erlernten nichts vergessen. So bald wir also wieder Zeit haben werden, werde ich zur Wiederholung ein Paar

Fragen thun, und wenn Sie diese werden beantworten können, dann gleich weiter.

S. Morgen doch ganz gewiß? Vergessen will ich gewiß nichts. Ich werde für mich noch einmal alles überdenken.

L. Gewiß versprechen will ichs nicht. Indeß wissen Sie ja, daß ich Ihnen, wenn Sie fleißig sind, dergleichen Bitten nicht abschlage.

Zweytes Gespräch.

L. Wie stehts? Wollen wir uns heute wieder über etwas aus der Mathematic unterreden?

S. Ich wüßte nichts, was ich lieber thun mögte, als das. Ich weiß nicht, woher es kommt, aber ich habe eine außerordentliche Lust zur Mathematic.

L. Woher es komme, kann ich Ihnen vielleicht sagen. Sie sehen mich, so oft ich kann, mit mathematischen Büchern beschäftiget, Sie hören mich oft mit der stärksten Empfindung von der Vortreflichkeit der Mathematic sprechen, und das hat immer Einfluß. Wenn aber dies so große Lust zur Mathematic in Ihnen hervorgebracht hat, was wird nicht erst seyn, wenn Sie selbst weit darin werden gekommen seyn?

S. Das

S. Das ist nur so schlimm, daß so viel Zeit dazu gehöret, ehe man etwas vollkommen lernt. Daß es mir sauer wird, darnach frage ich nichts, aber die Zeit dauert mich nur immer zu lang; ich komme nicht weit genug.

L. Das läßt sich nun einmal nicht ändern, zumal, wenn man alles, was man treibt, recht gut lernen will. Doch wie ists? Soll ich fragen, was Sie behalten haben?

S. Ueberdacht habe ich alles noch einmal, und ich denke, daß ich werde antworten können.

(Die Fragen: Was ist eine Linie? Wie viel Arten von Linien giebt es? Wie vielerley sind die einfachen Linien? Wie vielerley die zusammengesetzten? Was ist eine gerade Linie? Was ist eine krumme Linie? Sind die Linien, welche man zieht, Linien eigentlich, oder nur Zeichen der Linien? Wie benennet man Linien, und was setzt man neben ihnen, um sie benennen zu können? In was für einer Ordnung gebraucht man die Buchstaben? wurden nach dem, was im ersten Gespräch darüber gesagt worden, fertig und richtig beantwortet, bis auf die: Sind die Linien, welche man zieht, Linien eigentlich, oder nur Zeichen der Linien? Es ward also darüber noch einiges zur Erläuterung gesagt, oder vielmehr das gestrige über diesen Punkt wiederholt, und darauf also fortgefahren.)

L. Was würden Sie wohl sagen, wenn Sie jemanden die Größe des Raums hier auf dem Tische deutlich beschreiben wollten? Ist es ge-

nug, wenn Sie sagen: der Tisch ist 3 Fuß lang?

S. Nein, es kommt auch darauf an, wie breit er ist. Denn, wenn dieser Tisch noch einmal so breit wäre, so wäre ja der Raum auch noch einmal so groß.

L. Sollte es dabey nicht auch auf die Dicke des Tisches ankommen?

S. Der Raum auf dem Tische wird ja weder größer noch kleiner, wenn ich mir den Tisch dicker oder dünner vorstelle.

L. Ganz recht! Und was denken Sie Sich also, wenn Sie Sich den Raum hier auf dem Tische vorstellen?

S. Die Länge und Breite desselben. — Aber nein! ich denke mir doch auch eine Dicke, nicht die Dicke des Tisches, sondern die Dicke des Raums vom Tische an bis zur Decke.

L. Denken Sie aber dann den Raum auf dem Tische, oder den Raum über dem Tische?

S. Es ist ja wahr, darauf hatte ich nicht Acht.

L. Was antworten Sie, wenn Sie gefragt werden, wie groß der Garten hier beym Hause sey?

S. Ich sage, wie lang und wie breit er ist.

L. Nicht auch, wie dicke?

S. (Lächelnd) Nein!

L. Reden wir also nicht bisweilen von der Länge und Breite einer Sache, ohne im geringsten auf ihre Dicke zu sehn?

S. Ja.

L. Und das, was wir uns da denken, nennen wir eine Fläche.

S. Also ist eine Fläche eine Länge und Breite ohne Dicke? — — Das ist mir schon leichter zu begreifen gewesen, als gestern die Linie.

L. Das kommt mit daher, weil Sie gestern schon Ihr Nachdenken über einen Gegenstand, der diesem ähnlich ist, geübt haben. In der Folge werden Ihnen so gar Dinge, die Sie jezt schlechterdings nicht begreifen können, leicht werden. Doch wieder zu den Flächen! Vergleichen Sie einmal in Gedanken die Fläche dieses Tisches mit der Fläche einer Kugel. Sind diese Flächen unterschieden?

S. Ja die Fläche des Tisches ist gerade, und die Fläche der Kugel krumm.

L. Sollte es wohl noch mehr Arten von Flächen geben?

S. O ja! es giebt auch noch Flächen, die aus mehrern geraden, oder krummen, oder aus geraden und krummen Flächen zusammengesetzt sind.

L. Von den zusammengesetzten Flächen aber nicht zu reden, giebt es denn noch mehrere?

S. Nein.

L. Das, was Sie eine gerade Fläche nennen, nennt man nun besser eine ebene Fläche, oder auch schlechthin eine Ebene. Man sagt z. B. der Weg ist gerade, aber nicht so wohl, der

Boden ist gerade, als der Boden ist eben. Diesen Ausdruck müssen Sie Sich also anzugewöhnen suchen. Aber es ist auch nothwendig, daß Sie eine Ebene beschreiben können. Sind Sie es wohl im Stande?

S. (Nach einigem Nachdenken) Nein.

L. Könnten Sie wohl, wenn ich auf dem Tische zwey Punkte bemerkte, von dem einen zum andern eine gerade Linie ziehen?

S. Ja.

L. Ich mögte die Punkte bemerken, wo ich wollte?

S. Ja.

L. Können Sie das auch auf der Fläche einer Kugel?

S. Nein.

L. Aber irgend ein Paar Punkte wird man doch darauf annehmen können, so, daß man von dem einen zu dem andern eine gerade Linie auf der Kugel zu ziehen im Stande ist?

S. Nein.

L. Auf der gekrümmten Fläche dieser (einer walzenförmigen) Dose aber?

S. Ja, da kann man zwischen einigen Punkten eine gerade Linie ziehen, aber nicht zwischen allen.

L. Finden Sie nicht also hierin die Ebenen von den krummen Flächen unterschieden?

S. Ja.

L. Wie?

S. Auf

S. Auf einer Ebene kann man zwischen jeden zwey Punkten eine gerade Linie ziehen, auf einer krummen Fläche aber nicht.

L. Nun wird es Ihnen nicht schwer werden eine Ebene zu beschreiben.

S. Nun ist es leicht. Eine Ebene ist eine Fläche, in welcher man zwischen jeden zwey Punkten eine gerade Linie ziehen kann.

L. Die krumme Fläche ist doch der Ebene eben so entgegengesetzt, als die gerade Linie der krummen? Gestern erklärten Sie nun die krumme Linie durch eine solche, wovon kein Theil gerade ist. Versuchen Sie doch, die krumme Fläche auf eine ähnliche Art zu erklären.

S. Eine krumme Fläche ist eine solche, wovon kein Theil eben ist.

L. Das wäre also wieder ein Schritt. Sie haben gelernt, was eine Fläche überhaupt ist, und auch, was man unter einer Ebene und unter einer krummen Fläche zu denken hat. Die Ebene müssen Sie Sich vorzüglich merken. Denn alles das, was wir künftig betrachten werden, wird fürs erste in einer Ebene, oder auf einer Ebene, wenn Ihnen dies deutlicher seyn sollte, liegen, und dahin gehören nun vor allen Dingen die Winkel, über die wir uns auch noch unterreden wollen.

S. Das ist schön! Ich fürchtete schon, daß ich heute nichts weiter lernen sollte. Vielleicht nehmen Sie nach den Winkeln noch etwas vor, wenn ich sie mir bald bekannt mache.

L. Ich könnte das leicht. Aber im Anfange kommt es in der Mathematic vorzüglich darauf an, daß man alles recht fasse, und sich geläufig mache. Deswegen kann man nicht so viel auf einmal durchnehmen. Doch nur Geduld! Wir werden bald mehr durchbringen können.

S. Das wird mir eine Freude seyn.

L. Was sehen Sie auf der Ebene dieses Papiers? (der ersten Kupfertafel) Fig. 13.

S. Zwey Linien.

L. Und Fig. 14.?

S. Auch zwey Linien.

L. Finden Sie nicht unter diesen beyden Paaren von Linien einen Unterschied?

S. Ja, die Linien Fig. 13 sind aus einem Punkte gezogen, die Linien Fig. 14 aber nicht.

L. Wie sind denn die beyden Linien Fig. 15. beschaffen?

S. Sie sind auch aus einem Punkte gezogen.

L. Ist nicht aber zwischen den Linien Fig. 13. und zwischen denen, die Sie Fig. 15 sehen, ein Unterschied?

S. Ja, der Raum zwischen den Linien Fig. 15 ist größer, als der zwischen den Linien Fig. 7.

L. Wie aber, wenn ich die Linien Fig. 15 noch ein oder einigemal so lang machte, als sie jezt sind, welcher Raum wäre dann größer?

S. Der zwischen diesen Linien.

L. Ist also wohl die Größe des Raums zwischen zwey Linien, die aus einem Punkte ge-

gezogen sind, ein sicheres Kennzeichen zu ihrer Beschreibung?

S. Ja, aber es müssen auch die Linien eine bestimmte Größe haben.

L. Und wenn das nun nicht ist?

S. Dann nicht

L. Also suchen Sie ein anderes auf.

S. (Denkt nach, kann aber kein anderes Kennzeichen finden)

L. Wenn ein Baum sich in die Lage gegen die Erde begäbe, die, Fig. 13, die Linie ac gegen die Linie ab hat, was würden Sie von dem Baume sagen?

S. Daß er sich gegen die Erde neige.

L. Und wenn er erst die Lage gegen die Erde hätte, die, Fig. 15, die Linie df gegen die Linie de hat, und dann die vorhin gedachte annähme, was würden Sie dann von ihm behaupten?

S. Daß er sich jezt stärker neige, als vorher.

L. Nun aber stellen Sie Sich, Fig. 16, die beyden Linien ab und ac in a bevestiget vor; neigen sich nicht dieselben auch gegen die Linie cd?

S. Ja, sie neigen sich gegen dieselbe.

L. Beyde auf einerley Art?

S. Nein die Linie ac neiget sich stärker gegen die Linie cd, als die Linie ab.

L. Gesetzt nun, ich verlängere die Linien ab und ac, bis sie die Linie cd in den Punkten e und f treffen, so wie es in der Figur die Punkte anzeigen; sind nun nicht auch noch die Linien ae und af gegen die Linie cd geneigt?

 S. Ja.

S. Ja.

L. Und wie?

S. Die Linie ac neigt sich nicht so stark dagegen, als die Linie af.

L. Auf diese Art nun, Fig. 13 und 15, die Linie ca gegen ab, und die Linie fd gegen de betrachtet, welche neigt sich am stärksten?

S. Die Linie fd.

L. War es denn nach dem, was ich vorher von einem Baume sagte, auch so? — — Mich dünkt, da neigte sich ac stärker.

S. — — Ja, aber nach diesem Gleichnisse müßten wir uns auch die Linien ac und fd in c und f veste vorstellen.

L. Am Ende ist es willkürlich, wie man sichs vorstellen will, denn in der Sache selbst wird dadurch nichts geändert. Man richtet sich indeß nach dem, was wir zulezt gehabt haben, und df, Fig. 15, hat also gegen de eben so, wie af gegen cd, Fig. 16, eine stärkere Neigung, als ac, Fig. 13, gegen ab, und ae, Fig. 16, gegen cd.

S. Das ist auch besser. So gehts nach dem Raume zwischen diesen Linien, und man kann es besser merken.

L. Die Neigung zwey gerader Linien, die in einem Punkte zusammenstossen, gegen einander, diese Neigung, sage ich, sind Sie also wohl im Stande, Sich vorzustellen?

S. O ja!

L. Ist sie bey jeden zwey Linien, die in einem Punkte zusammenstossen, einerley?

S. Nein,

S. Nein, sie ist bald größer, bald kleiner.

L. Was ist denn wohl ein Winkel?

S. (Stuzt und sinnt)

L. Der Sache nach kennen Sie ihn gewiß, vielleicht haben Sie ihn nur nicht so nennen hören.

S. Etwa eine Neigung zwey gerader Linien gegen einander?

L. Wie kommen Sie darauf?

S. Ich dachte an die Winkel hier in der Stube und in unserm Garten, und weil da doch auch Neigungen sind, so muthmaßte ich.

L. Sie haben recht gemuthmasset. Ihre Winkel sind darin von denen, welche ich jezt mit Ihnen betrachte, unterschieden, daß da Flächen anstatt der Linien hier sind. — — Sind also alle Winkel gleich groß?

S. Nein, der Winkel z. B. Fig. 15, ist größer als der Fig. 13.

L. Aber wie, wenn ich die Linien ab und ac verlängerte, daß mehr Raum zwischen sie käme?

S. Ja dann.

L. Dadurch also, daß ich die Linien ab und ac verlängere, sonst aber weder sie noch ihre Lage verändere, mache ich doch ihre Neigung gegen einander anders?

S. Nein.

L. Der Winkel, den diese beyden Linien haben, soll ja doch nach dem, was Sie sagen, größer werden, wenn ich die Linien größer mache, und ist denn der Winkel von zwey Li-

nien

nien etwas anders als ihre Neigung gegen einander?

S. (Mit Scham) Ich habe mich geirrt.

L. Ja, aber geirrt, wie hier fast jeder, der die Mathematic erlernt, einmal irrt. Merken Sie Sich nun nur, daß die Größe der Winkel nicht von der Länge ihrer Linien abhange; so ist Ihr Fehltritt leicht zu vergeben. Nun muß ich Ihnen ein Paar Benennungen sagen, die ich künftig oft gebrauchen werde. Man nennt nemlich die Linien, die bey einem Winkel vorkommen, nicht Linien mehr, sondern Schenkel, und den Punkt, worin beyde zusammenstossen, die Spitze. Um einen Winkel so wohl als seine Schenkel und seine Spitze bequem benennen zu können, bezeichnet man seine Schenkel als gerade Linien an ihren Endpunkten mit Buchstaben, und benennt nach denselben den ganzen Winkel, so, daß man den an der Spitze in die Mitte setzt. Der Winkel, Fig. 13, z. B. heißt cab oder bac, aber nicht acb oder abc u. s. w. Die Schenkel benennt man, wie die geraden Linien, und die Spitze erhält ihren Namen von dem Buchstaben, der an ihr steht. Bisweilen muß auch dieser Buchstabe den ganzen Winkel bezeichnen, und man sagt, Fig. 13, die Spitze a und der Winkel a. Oft schreibt man auch einen Buchstaben zwischen die Schenkel, wie Fig. 15. Dieser Winkel kann daher auch der Winkel o heißen.

S. Das

S. Das ist alles leicht zu merken, aber wir hören doch wohl noch nicht auf?

L. Wenn Sie noch Lust haben, nicht; denn es giebt noch manches bey den Winkeln zu lernen. Jezt war ich so nicht willens unser Gespräch schon zu endigen, und da ich sehe, daß Sie begierig sind, alles zu hören, so werde ich es um so viel weniger thun.

S. Also sind wir mit den Winkeln noch nicht fertig? Ich weiß doch, was ein Winkel ist, und worauf es ankomme, wenn man sagen will, daß ein Winkel größer sey, als ein anderer. Auch was die Buchstaben bey einem Winkel bedeuten, haben Sie mir gesagt. Was kann denn nun noch übrig seyn?

L. Haben wir wohl bey den Linien blos darüber gesprochen, was eine Linie sey, und wie man sie bezeichne? oder redeten wir auch von den verschiedenen Arten der Linien?

S. Ach so! Also muß ich nun die verschiedenen Arten der Winkel kennen lernen? Das ist ja wahr, aber ich dachte nicht daran. — — Was kann es denn aber hier für Arten geben?

L. Was waren das für Linien, die sich bey den Winkeln, Fig. 13, 15, 16, gegen einander neigten?

S. Gerade Linien.

L. Sollten nicht auch krumme Linien gegen gerade, oder gegen andre krumme Linien, sich neigen können?

S. Warum nicht?

L. Und die Neigungen dieser krummen Linien gegen gerade, oder gegen andre krumme, sind doch gewiß von einer andern Art, als die Neigungen gerader Linien gegen gerade?

S. Also giebt es Winkel gerader Linien und krummer Linien?

L. Recht, oder wie man zu reden pflegt, geradlinige und krummlinige Winkel. Man kann auch dazu die vermischtlinigen Winkel setzen. Fig. 13, 15, 16, sind also geradlinige Winkel, Fig. 17 ein krummliniger, und Fig. 18, ein vermischtliniger.

S. Das will ich mir wohl merken.

L. Aber noch eins. Wie liegen die Schenkel aller angeführten Winkel? in einer Ebene oder in mehrern?

S. In einer. Sie liegen ja alle in der Ebene der Tafel.

L. Aber wenn ich, Fig. 17. die Schenkel ac und bc des krummlinigen Winkels acb in a, b und c liegen lasse, und die Punkte i und k erhebe, (der Lehrer macht dies durch ein Paar unbeugsame Faden auf der Oberfläche eines Tisches sinnlich) werden dann die Schenkel auch noch in einer Ebene und zwar mit allen ihren Punkten liegen?

S. Nein.

L. Solche Winkel nun, als diese zuletzt betrachteten, nennt man unebene Winkel, und giebt den Arten derselben, denn es giebt mehrere davon, wiederum besondere Namen. Für uns

uns aber ist es genug, wenn wir uns nur den Begriff davon jezt merken. Die vorher betrachteten Winkel Fig. 13, 15, 16, 18 und 17 aber, wenn man die Schenkel so sich vorstellt, als sie die Figur zeigt, nennt man ebene Winkel, und die sind für uns so wichtig, daß wir sie noch nicht verlassen dürfen. Wie würden Sie also wohl die Winkel eintheilen?

S. In ebene und unebene Winkel.

L. Und was verstehen Sie unter einem ebenen Winkel?

S. Die Neigung zwey gerader Linien, die in einer Ebene gezogen sind, gegen einander.

L. Giebt es aber nicht auch verschiedene Arten der ebenen Winkel?

S. Ja, es giebt geradlinige und krummlinige und vermischtlinige.

L. Von diesen verschiedenen Arten haben wir nun fürs erste blos die geradlinigen Winkel nöthig, und weil wir von den übrigen lange Zeit gar nicht reden werden, so werde ich die geradlinigen Winkel, die nun auch zugleich ebene Winkel sind, oft schlechthin Winkel oder geradlinige Winkel nennen. Und nun wollen wir sehen, ob wir nicht auch bey diesen Winkeln verschiedene Arten entdecken können?

S. Auch von den geradlinigen Winkeln giebt es wieder verschiedne Arten? Die Winkel gefallen mir viel besser, als die Linien. Ich habe dabey viel mehr zu lernen.

L. Wer-

L. Werden Sie aber auch alles eben so gut fassen und behalten können?

S. Ich will es desto fleißiger überdenken.

L. Betrachten Sie also, Fig. 19, die Linie cd auf der Linie ab. Wie viel Winkel sind hier?

S. Zwey, der Winkel acd und der Winkel dcb.

L. Welches sind die Schenkel dieser Winkel?

S. Die Schenkel des Winkels acd sind ac und cd, und die Schenkel des Winkels dcb sind dc und cb.

L. Zu welchem Winkel gehört also der Schenkel dc?

S. Zu beyden.

L. Also haben diese beyden Winkel einen Schenkel gemein, und wie könnte ich sie daher wohl beschreiben?

S. Durch zwey Winkel, die einen Schenkel gemein haben.

L. Haben nicht, Fig. 20, die beyden Winkel acb und bcd auch einen Schenkel gemein?

S. Ja, den Schenkel bc.

L. Was findet aber gleichwohl unter beyden Winkelpaaren für ein Unterschied statt?

S. Bey den Winkeln acd und dcb liegen die übrigen Schenkel in einer geraden Linie, bey den Winkeln Fig. 20 aber nicht.

L. Winkel wie, Fig. 19, acd und dcb nennt man nun Nebenwinkel, und was werden Sie Sich also unter Nebenwinkeln vorstellen?

S. Zwey

S. Zwey Winkel, die einen Schenkel gemein haben, und wobey die übrigen Schenkel in einer geraden Linie liegen.

L. Man setzt bisweilen auch noch hinzu: und zwar von der Spitze an nach verschiedenen Seiten. Denn dächte man sich die Schenkel, die in einer geraden Linie liegen sollen, nicht so, so hätte man nur einen Winkel eigentlich, nicht zwey.

S. Aber wie könnte man sichs denn so denken, es wird ja von zwey Winkeln gesprochen?

L. Man denkt sichs gewöhnlich auch ohne den angeführten Zusatz so, wie man es sich denken muß; indeß sucht man in der Mathematic auch gern, sich ganz vollständig und deutlich auszudrucken. — — Nun stellen Sie Sich vor, daß, Fig. 19, die Linie dc sich um den Punkt c drehe, und zwar anfänglich nach b zu. Was würde mit den Winkeln acd und dcb vorgehen?

S. Der Winkel dcb würde kleiner, und der Winkel acd größer werden.

L. Wenn sich aber dc nach a zu bewegte?

S. Dann würde dcb größer, und acd kleiner werden.

L. Würden nicht beyde auch einmal gleich seyn?

S. Ja, denn jezt ist dcb kleiner und acd größer. Wenn ich nun dcb immer größer, und acd immer kleiner mache, so müssen beyde einmal einander gleich werden.

L. Fig. 21 sind acd und dcb wirklich gleich. In dieser Figur aber sind zwischen ac und dc, und dc und cb noch einige Linien ec punktirt gezeichnet. Diese haben gegen die Linie cb den Winkel oder die Neigung ecb. So lange die Linie ec zwischen cb und cd fällt, ist der Winkel ecb kleiner, als der Winkel dcb, so bald aber ec zwischen cd und ac fällt, ist der Winkel ecb größer, als dcb.

S. Das ist offenbar.

L. So lange nun der Winkel ecb kleiner ist, als dcb, heißt er ein spitziger Winkel, wenn er aber größer ist, ein stumpfer, und dcb oder acd selbst ein rechter Winkel. Dies sind Benennungen, die oft vorkommen, daher ich einige Fragen thun will, um zu sehen, ob Sie sie recht verstehen. Was denken Sie Sich also unter einem rechten Winkel?

S. Einen von zwey gleichen Nebenwinkeln.

L. Unter einem spitzigen aber?

S. Einen Winkel, der kleiner ist, als ein rechter.

L. Und unter einem stumpfen?

S. Einen Winkel, der größer ist, als ein rechter.

L. Sind alle spitzige Winkel einander gleich, oder kann einer größer seyn, als ein anderer? Sie sehen zwey in der 21ten Figur.

S. Einer kann größer seyn, als der andere.

L. Sind alle stumpfe Winkel einander gleich?

S. Nein, es kann auch ein stumpfer Winkel größer seyn, als ein anderer stumpfer.

L. Kann

L. Kann auch ein rechter Winkel größer seyn, als ein anderer rechter?

S. (Besinnt sich) Ich glaube nicht.

L. Sie haben vollkommen recht; und wenn wir unsere Gespräche fortsetzen, so werden wir noch einmal auf diesen Punkt kommen, und dann werden Sie Sich vollkommen davon überzeugen. Wie kann man also die ebenen geradlinigen Winkel eintheilen.

S. In rechte, spitzige und stumpfe.

L. Wie dächten Sie wohl antworten zu müssen, wenn Sie gefragt würden, wie, Fig. 19, die Linie cd auf der Linie ab stehe?

S. Schief.

L. Fig. 21 aber?

S. Gerade.

L. Hier bedient man sich des Worts senkrecht. Wenn steht also eine gerade Linie schief auf einer andern?

S. Wenn ihre beyden Winkel mit derselben ungleich sind.

L. Und wenn senkrecht?

S. Wenn diese Winkel gleich sind.

L. Wäre es nicht noch deutlicher, wenn ich sagte: eine Linie steht auf einer andern schief, wenn die Nebenwinkel beyder Linien ungleich sind, und senkrecht, wenn diese Winkel gleich sind.

S. Ja.

L. Auf diese Art drucken Sie Sich also aus, wenn Sie darüber gefragt werden. — — Und

nun habe ich Ihnen für jezt über die Winkel nichts mehr zu sagen, als daß man anstatt der rechte Winkel, wenn man davon schreibt, bloß R setzt.

S. Was folgt denn nach den Winkeln?

L. Wenn Sie das Erlernte nicht vergessen haben werden, so werden Figuren folgen. Sollte aber dies seyn, so müßten wir uns wohl über das Vergessene noch einmal unterreden.

S. Es ist mir so angenehm gewesen, daß noch immer etwas übrig war, wenn ich dachte, wir wären schon fertig, daß ich wohl noch mehreremal die Winkel vornehmen wollte. Aber etwas neues ist doch besser, und ich will also lieber alles wieder recht fleißig überdenken. Haben Sie nur Geduld, ich will über die Winkel eben so antworten können, als über die Linien, wenn Sie mich fragen werden.

L. Die Flächen aber doch auch nicht vergessen?

S. Das ist gut, daß Sie mich daran erinnern, die hätte ich sonst vergessen.

Drittes Gespräch.

L. Was meinen Sie? Werden wir heute wohl zu den Figuren fortgehen können?

S. Ich hoffe, ja. Freylich bin ich mit dem Ueberdenken der Flächen und Winkel nicht so bald fertig geworden, als neulich mit dem Ueber-

denken dessen, was wir von den Linien gehabt hatten, aber schwerer ist es mir eben nicht geworden, mir alles wieder vorzustellen.

L. Wenn man nicht lange nachher das, was man deutlich eingesehen hat, wiederholt, so fällt es mehrentheils nicht schwer, sich an alles wieder zu erinnern, es müßten denn der Sachen gar zu viele seyn. Aber wenn man wieder eine Zeitlang mit andern Dingen sich abgiebt, oder vieles hinter einander hat durchnehmen müssen, so verschwindet doch oft manches wieder, wenn man es auch noch so deutlich eingesehen hat.

S. Ich habe das schon erfahren. Bisweilen wußte ich etwas, das ich gerne behalten wollte, so, daß ich glaubte, ich würde es nie wieder vergessen, und doch vergaß ich es, ehe ich mich versah. Ist denn kein Mittel dawider?

L. Wenn wir bisweilen so lange und über so vieles uns unterreden sollten, daß Sie deswegen nicht alles hätten behalten und Sich wieder vorstellen können, so werden Sie doch, und sollte es auch nur ohngefähr und muthmaßlich seyn, wissen, wo Ihnen etwas entfallen ist. In diesem Fall will ich Ihnen die Erlaubniß geben, so oft ich wiederholen will, mich darüber zuvor zu fragen, und es soll Ihnen selbst frey stehen, mir das zu nennen, was Sie behalten haben, und mich dann zu fragen, ob Sie nicht etwas vergessen haben. Haben Sie wirklich etwas vergessen, so führe ich Sie dann wieder darauf, und will es schon machen, daß Sie

es leichter behalten. Um aber über andere Dinge, und weil wir doch nicht immer das Erlernte vom Anfang an wiederholen können, das, was da gewesen, nicht wieder zu vergessen, befolgen Sie diesen Rath, denn ein Rath soll es nur seyn, weil ich einem Fleißigen und Gutgesinnten nicht gerne Befehle gebe, und schreiben Sie dasselbe kurz auf. Wenn Sie mir diese Aufsätze zeigen, so will ich es Ihnen sagen, wenn darin etwas zu verbessern ist, und dann verbessern Sie sie noch und verwahren sie. So oft Ihnen alsdann etwas entfallen ist, so können Sie unter diesen Aufsätzen den aussuchen, in welchem es vorkommt, und durch Durchlesung desselben es sich von neuem einprägen. Stellen Sie Sich nur vor, was Sie sagen würden, wenn Sie einem andern das erzählen wollten, was wir über die Linien und Flächen und Winkel gesprochen haben, und gerade dies schreiben Sie auf, weiter nichts.

S. Das werde ich wohl können; und wenn soll ich es thun?

L. Wenn Sie wollen. Wir werden so in einigen Tagen uns nicht über die Mathematic unterreden, und Sie also schon Zeit dazu finden. — — Nun denken Sie noch einmal nach. Vielleicht kann Ihnen heute schon die Erlaubniß, die ich vorhin Ihnen zu geben versprach, zu statten kommen.

S. Heute denke ich wohl, daß sie nicht nöthig seyn wird.

(Was

(Was ist eine Fläche? Was eine Ebene? Was eine krumme Fläche? Was ist ein Winkel? Was ein Schenkel? Was versteht man unter der Spitze eines Winkels? Kommt es bey der Größe eines Winkels auf die Länge der Schenkel an? Wie kann man die Winkel eintheilen? Wie viel Arten ebener Winkel giebt es? Wie vielerley sind die ebenen geradlinigen Winkel? Was ist ein ebener, was ein ebener und geradliniger, was ein rechter, ein spitziger, ein stumpfer Winkel? Wie bezeichnet und benennt man einen Winkel, wie die Schenkel und die Spitze? Was versteht man unter Nebenwinkeln? Wenn steht eine gerade Linie auf einer andern schief, und wenn senkrecht? Alle diese Fragen wurden richtig beantwortet, und der Lehrling erhielt ein verdientes Lob)

L. Was ist wohl hier auf dem Tische? (Der Tisch war leer)

S. Nichts.

L. Könnten Sie wohl eins oder ein Paar von ihren Büchern auf den Tisch legen?

S. Warum nicht.

L. Wenn er aber schon voll Bücher wäre?

S. Dann nicht.

L. Warum dann nicht?

S. Es wäre kein Raum mehr da.

L. Was ist also doch auf dem Tische?

S. Raum. Daran dachte ich nicht. Ich meinte, ob nicht sonst etwas auf dem Tische wäre.

L. Aber was für ein Raum ist es, ein ebener, oder ein unebener?

S. Ein ebener Raum.

L. Wenn Sie nun jemanden den Raum hier auf dem Tische ganz genau beschreiben wollten, was würden Sie ihm sagen? Wäre es genug, wenn Sie ihm sagten, es ist ein ebener Raum?

S. Nein, ich müßte ihm auch sagen, wie groß er ist.

L. Und was würden Sie ihm in dieser Absicht sagen?

S. Wie lang, und wie breit er ist.

L. Gesetzt nun, Sie hätten das alles gesagt, was hätten Sie alsdann von dem Tische beschrieben? die Materie, woraus er gemacht ist?

S. Nein, sondern die Figur des Tisches.

L. Da haben Sie den rechten Ausdruck gebraucht. Ich dachte nicht, daß Sie ihn schon wüßten.

S. Ich habe ihn schon oft gehört.

L. Was denken Sie Sich also, wenn Sie Sich die Figur einer Sache vorstellen?

S. Die Größe derselben.

L. Sehen Sie dabey auch auf die Materie, woraus diese Sache besteht?

S. Nein.

L. Also wohl blos auf den Raum, den sie einnimmt?

S. Ja.

L. Sie haben doch auch eine Figur?

S. Ja.

L. Aber ist Ihre Figur nicht sehr von der Figur des Tisches hier, so wie wir sie vorhin betrachteten, indem wir da blos auf die Länge und Breite desselben sahen, verschieden?

S. Ja, bey meiner Figur giebt es auch eine Dicke.

L. Also giebt es doch verschiedene Arten von Figuren?

S. Ja, körperliche Figuren, und — — wie nennt man denn die andern?

L. Flächenfiguren.

S. Der Name ist gut, denn bey jenen denke ich mir einen Körper, aber bey diesen nur eine Fläche.

L. Sollte es wohl nicht auch verschiedene Arten von Flächenfiguren geben?

S. Ja, ebene und krumme, denn es giebt ja ebene und krumme Flächen.

L. Gut! Was ist nun aber eine Figur überhaupt?

S. (Antwortet nicht gleich.)

L. Was denken Sie Sich, wenn Sie Sich eine Figur, was für eine es sey, vorstellen?

S. Den Raum, den etwas einnimmt.

L. Ist dieser Raum begränzt, oder geht er nach allen Seiten ohne Aufhören fort?

S. Nein, er ist begränzt.

L. Was könnte also wohl eine Figur seyn?

S. Ein begränzter Raum.

L. Und eine Flächenfigur?

S. Eine begränzte Fläche.

L. Eine ebene Figur aber?

S. Eine begränzte Ebene.

L. Wie würden Sie es denn wohl machen, wenn Sie einen Theil der Fläche dieses Tisches begränzen wollten?

S. Ich müßte Linien um denselben ziehen.

L. Wovon sind also die Flächenfiguren und ebenen Figuren begränzt?

S. Von Linien.

L. Sind das immer gerade Linien, wie hier bey dem Tische?

S. Es können ja auch wohl krumme Linien seyn?

L. Auch gerade zum Theil und zum Theil krumme.

S. Also giebt es ja auch wohl wieder verschiedene Arten von Flächenfiguren, geradlinige nemlich, krummlinige und vermischtlinige?

L. Ganz recht! aber die Flächenfiguren überhaupt theilt man zuerst in ebene und in unebene Figuren. Ich sage hier blos Figur, nicht Flächenfigur mehr, denn wenn man in der Mathematic das Wort Figur ohne Zusatz gebraucht, so versteht man darunter immer Flächenfiguren, und mehrentheils auch ebene Figuren. Die ebenen Figuren theilt man wieder in geradlinige, krummlinige und vermischtlinige. Was man also unter einer ebenen und geradlinigen Figur zu verstehen habe, werden Sie mir wohl sagen können?

S. Eine

S. Eine Ebene, die von geraden Linien begränzt wird.

L. Ich sehe schon aus dieser Antwort, daß Sie auch zu sagen im Stande seyn werden, was man unter einer krummlinigen und vermischtlinigen Figur verstehe. Ich will Ihnen also darüber keine Fragen vorlegen, aber dagegen sagen, daß man die Linien, die sich in einer Figur befinden, mit dem Namen Seiten belege, und nun wollen wir uns verschiedene Arten der ebenen und geradlinigen Figuren und eine krummlinige Figur bekannt machen. Betrachten Sie also die 22te, 23te, 24te und 25te Figur, und sagen Sie mir, was es für welche sind?

S. Die 22te, 23te und 24te Figur sind geradlinige, und die 25te ist eine krummlinige.

L. Was ist denn aber unter der 22ten, 23ten und 24ten Figur für ein Unterschied?

S. Die 22te Figur hat nur drey Linien, die 23te aber vier, und die 24te fünfe.

L. Wie sagte ich vorher, daß man die Linien nenne, welche Figuren begränzen?

S. Seiten.

L. Wie hätten Sie also antworten können?

S. Die 22te Figur hat drey Seiten, die 23te viere, und die 24te fünfe.

L. Vorher nannten Sie die Figuren, die von geraden Linien begränzt wurden, geradlinige Figuren. Wie müßten Sie wohl die Figuren

guren nennen, die drey Seiten haben, wenn Sie es auf eine ähnliche Art thun wollten?

S. Dreyseitige Figuren.

L. Und die, welche vier Seiten haben?

S. Vierseitige.

L. Haben Sie wohl diesen Tisch schon einen vierseitigen Tisch nennen gehört?

S. Nein.

L. Wie denn?

S. Viereckig.

L. Wie nennten wir also auch wohl die Figuren, die drey Seiten haben, besser?

S. Dreyeckige.

L. Auch Dreyeck, wenn man von einer, und Dreyecke, wenn man von mehrern redet. Diese Benennnng ist ebenfalls sehr natürlich, denn jede ebene und geradlinige Figur hat so viel Ecken, als sie Seiten hat. Die vierseitige Figur kann man daher, wie man auch thut, sehr bequem eine viereckige Figur, oder ein Viereck, nennen, und was ein Fünfeck, Sechseck, Siebeneck u. s. w. sey, habe ich wohl nicht nöthig, weitläuftig zu beschreiben. Aber das muß ich noch anführen, daß man alle die Figuren, die mehr als vier Seiten haben, mit einem allgemeinen Namen Vielecke nennt. — — Was ist also ein Dreyeck?

S. Eine Figur, die drey Seiten hat.

L. Betrachten Sie nun die Dreyecke Fig. 22, 26 und 27, und sagen Sie mir, wie Ihnen die=

dieselben in Ansehung ihrer Seiten verschieden scheinen?

S. Die Seiten des Dreyecks Fig. 22 sind ungleich, in dem Dreyecke Fig. 26 aber sind zwey Seiten gleich, und in dem Dreyecke Fig. 27 sind alle Seiten gleich.

L. Wie könnten wir nun wohl ein Dreyeck, wie Fig. 22, das drey ungleiche Seiten hat, nennen?

S. Ein ungleichseitiges Dreyeck.

L. Und ein Dreyeck, wie Fig. 27?

S. Ein gleichseitiges.

L. Diese Benennungen sind gut, und die gewöhnlichen, ich werde sie auch in der Folge oft gebrauchen. Aber wie wollen Sie nun ein Dreyeck, wie Fig. 26, nennen, worin nur zwey Seiten gleich sind?

S. (Nach einigem Nachdenken) Das weiß ich nicht.

L. Ich will Ihnen also noch sagen, daß man in einem solchen Dreyecke die beyden gleichen Seiten die Schenkel und die übrige dritte Seite die Grundlinie desselben nennt.

S. Also kann man es ja ein gleichschenkliges Dreyeck nennen.

L. So nennt man es auch, und Sie kennen also drey Arten von Dreyecken, ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige. Sollte es wohl noch mehr Arten geben?

S. Nein.

L. Wenn

L. Wenn man auf die Seiten sieht, freylich nicht. Aber vergleichen Sie nun die Dreyecke Fig. 22, 26 und 28 mit einander, so daß Sie auf die Winkel derselben sehen. Wie sind die Winkel in allen diesen Dreyecken beschaffen, oder was für Winkel scheinen es Ihnen zu seyn?

S. In dem Dreyeck Fig. 22 ist ein stumpfer Winkel und zwey spitzige, und in dem Dreyecke Fig. 26 sind alle Winkel spitzig, und Fig. 28 ist einer ein rechter Winkel.

L. Ein Dreyeck, das alle Seiten ungleich hat, nannten Sie vorhin ein ungleichseitiges, und das, worin alle Seiten gleich waren, ein gleichseitiges. Wie kann man also wohl ein Dreyeck nennen, das einen rechten Winkel hat, wie Fig. 28?

S. Ein rechtwinkliges Dreyeck.

L. Und das, das einen stumpfen Winkel hat?

S. Ein stumpfwinkliges.

L. Endlich das, welches lauter spitzige Winkel hat?

S. Ein spitzwinkliges.

L. Sie haben ja alle Namen selbst gefunden, die man hier gebraucht. Merken Sie Sich aber, daß ein rechter Winkel schon einem Dreyeck den Namen eines rechtwinkligen Dreyecks giebt, so wie man auch von einem stumpfen Winkel schon das stumpfwinklige Dreyeck benennt. Aber wenn ein Dreyeck spitzwinklig heißen soll, so müssen alle Winkel spitzig seyn.

Wie

Wie viel Arten von Dreyecken giebt es also, wenn man auf die Winkel sieht?

S. Drey, stumpfwinklige, rechtwinklige und spitzwinklige.

L. Drey Arten also, wenn man auf die Seiten sieht, und drey, wenn man auf die Winkel sieht, in allen also?

S. Sechs.

L. Nun könnte ich auch mit Ihnen über die Vierecke und Vielecke reden, und deren verschiedene Arten Ihnen bekannt machen. Sie würden dann lernen, was ein Parallellogramm, ein Quadrat, ein Rhombus, ein Rectangel und Rhomboides, ein reguläres und ein irregulares Vieleck sey. Indeß können wir dies auch bequem noch eine Zeitlang aussetzen, und wir wollen uns also die 25te Figur bekannt zu machen suchen.

S. Wollen Sie nicht lieber auch von den Vierecken jezt erst mit mir reden? ich mögte gern alle Figuren recht vollständig kennen lernen.

L. Das sollen Sie auch; aber wir haben von alle dem, wovon ich mit Ihnen geredet haben, noch weit mehr übrig, als ich Ihnen bereits gesagt habe, und wenn Sie erst dies lernen, so werden Sie die übrigen Figuren weit leichter und besser kennen lernen können, als ohne dasselbe.

S. Aber warum wollen Sie nun doch noch erst von der 25ten Figur mit mir reden?

L. Diese

L. Diese ist uns auch höchst nöthig, und wenn Sie darüber nicht unterrichtet sind, so muß ich ebenfalls manches sehr wichtige und angenehme auslassen.

S. Dann wollen wir sie lieber erst vornehmen. Wie nennt man sie denn?

L. Wie nennen Sie denn das, wenn Sie bisweilen bey Ihren Spielen mit einem Stocke etwas ähnliches im Sande um Sich her machen?

S. Einen Kreis.

L. Verstehen Sie darunter blos die Linie, welche Sie im Sande beschreiben, oder den Platz innerhalb derselben?

S. Den Platz innerhalb derselben.

L. Man nennt den ebenen Raum, der Fig. 25 von der krummen Linie daselbst begränzt ist, ebenfalls einen Kreis, und die Linie, welche ihn begränzt, wie wohl?

S. Ich dachte, Sie würden es mir sagen; eine Linie um einem Kreise?

L. Mit einem kürzern Ausdrucke nennt man sie eine Kreislinie, und mit einem griechischen Namen, eine Peripherie. Was ist nun aber ein Kreis?

S. Eine krummlinige Figur.

L. Sollte das schon genug seyn? Was steht Fig. 29?

S. Auch eine krummlinige Figur.

L. Aber gewiß kein Kreis. Wir müssen also, um den Kreis deutlich zu beschreiben, wohl noch einige Eigenschaften desselben aufsuchen. Beobach

obachten Sie zu dem Ende, wie ich mit diesem Instrumente, das man einen Zirkel nennt, einen Kreis beschreibe. (Der Lehrer beschreibt einen Kreis.) Nun sagen Sie mir, ist von dem Punkte innerhalb des Kreises, in welchem die eine Zirkelspitze stand, der Umkreis an einem Orte weiter als an einem andern, oder allenthalben gleich weit entfernt?

S. Der Umkreis ist von diesem Punkte allenthalben gleich weit entfernt, so weit nemlich, als der Zirkel geöffnet war.

L. Könnten Sie in der 29ten Figur auch wohl einen Punkt finden, von dem die Linie, welche sie begränzt, auch allenthalben gleich weit entfernt wäre?

S. Nein.

L. Nennen Sie also den gedachten Punkt den Mittelpunkt, und versuchen Sie nun, einen Kreis genauer zu beschreiben.

S. Ein Kreis ist eine krummlinige Figur, deren Umkreis von ihrem Mittelpunkte allenthalben gleich weit entfernt ist.

L. Recht! Wenn ich also von dem Mittelpunkte eines Kreises nach seinem Umkreise mehrere gerade Linien ziehe, wird darunter eine größer als die andere, oder alle gleich seyn?

S. Sie werden alle gleich seyn.

L. Eine solche Linie nennt man nun den Halbmesser des Kreises; und wie sind also alle Halbmesser eines Kreises beschaffen?

S. Alle unter einander gleich.

L. Und wie kann man einen Halbmesser beschreiben?

S. Es ist eine gerade Linie in einem Kreise zwischen dem Mittelpunkte und dem Umkreise.

L. Mehr wollen wir jezt nicht von dem Kreise nehmen, obgleich noch vieles übrig ist, welches Sie künftig auch schon lernen sollen. Mit dem gemachten Anfange bin ich recht wohl zufrieden, und wenn Sie so aufmerksam und lernbegierig zu seyn fortfahren werden, so hoffe ich Sie bald zu einem Lieblinge der Mathematic zu machen. In einigen Tagen werde ich mich nun, wie ich Ihnen schon gesagt, nicht über die Mathematic mit Ihnen unterreden. Wenden Sie also die Zeit, die Sie dazu übrig haben werden, an, alles, was wir gehabt haben, so aufzuschreiben, als wenn Sie es jemanden erzählen wollten.

Viertes Gespräch.

S. Ich habe das, was ich von den Linien, Flächen, Winkeln und Figuren gelernt habe, so aufgesetzt, als wenn ich es meinem Vater hätte schreiben sollen. Ich habe es aber dreymal abschreiben müssen, denn ich hatte immer etwas vergessen.

L. Es ist das für Sie eine neue Arbeit, und alles neue muß erst eine Zeitlang und oft getrieben werden, ehe man gleich es so machen kann, als

als man sichs vornimmt und in Gedanken vorstellt.

(Nach diesem Anfange las der Lehrer den Aufsatz durch, und verbesserte ihn. Die Sachen waren mehrentheils richtig, und nach einigen wenigen Verbesserungen und mit Weglassung der orthographischen Fehler ist er folgender.)

Bester Vater!

Mein Lehrer hat diese Woche mit mir etwas neues angefangen, ich lerne nun Mathematic. Dreymal hat er schon mit mir über verschiedene Dinge daraus gesprochen, und ich soll nun alles das aufsetzen, was wir gehabt haben. Er gab mir den Rath, ich sollte mir nur vorstellen, daß ichs jemanden erzählen wollte, und ich schreibe es Ihnen, denn Ihnen habe ich ja oft erzählen müssen, was ich getrieben hatte. Das erstemal sprachen wir von Linien. Wenn ich mir eine Linie vorstelle, so denke ich mir blos eine Länge, denn eine Linie ist eine Länge ohne Breite. Es giebt einfache Linien und zusammengesetzte. Die einfachen sind entweder gerade oder krumm. Die geraden Linien haben nur eine Richtung, die krummen aber alle Augenblick eine andere. Die zusammengesetzten Linien bestehen entweder aus lauter geraden, oder aus lauter krummen, oder aus geraden und krummen zugleich. Man bezeichnet die Linien durch Buchstaben, welche man zu Anfange und zu Ende und bisweilen auch in die Mitte setzt, und be-

benennt sie auch darnach. Hierüber haben wir das erstemal gesprochen. Das zweytemal wiederholte mein Lehrer erst, und dann sprach er mit mir von Flächen und Winkeln. Eine Fläche ist eine Länge und Breite ohne Dicke. Manche Flächen sind eben, und die nennt man auch Ebenen, manche aber sind krumm. Wenn Flächen eben sind, so kann man darauf, wo man will, gerade Linien ziehen, sind sie aber krumm, so geht das nur bisweilen an, oder es ist kein Stück davon eben. Von den Winkeln haben wir aber viel mehr gehabt. Einen Winkel nennt man die Neigung zwey gerader Linien, die in einem Punkte zusammen kommen. Hier giebts recht viel Arten: ebene Winkel, wenn die geraden Linien, die in einem Punkte zusammen kommen, in einer Ebene liegen, und unebene, wenn das nicht ist. Man nennt aber die Linien, welche den Winkel machen, nicht mehr Linien, sondern Schenkel, und der Punkt, worin sie zusammenkommen, heißt die Spitze. Die ebenen Winkel sind nun wieder entweder geradlinige, oder krummlinige, oder vermischtlinige Winkel, und die geradlinigen theilt man in rechte Winkel, in stumpfe Winkel und in spitzige Winkel ein. Man sieht hiebey auf die Größe, dabey kommt aber, das hätte ich bald vergessen, auf die Länge der Schenkel nichts an. Auch von den Nebenwinkeln haben wir gesprochen, und auch davon, daß man einen Winkel nach den Buchstaben benennt, die an seinen

Schen-

Schenkeln stehn, der an der Spitze aber muß immer in die Mitte genommen werden, man kann ihn auch allein nehmen, oder zwischen die Schenkel einen Buchstaben schreiben. Das drittemal gab mir mein Lehrer, da wir wiederholten, den Rath, daß ich künftig, was ich in der Mathematic lernen würde, aufsetzen sollte. Ich habe es gethan, wenn es nur gerathen seyn wird. Aber ich muß ja noch schreiben, was wir nun noch durchnahmen. Was eine Figur sey? war das erste. Eine Figur ist ein begränzter Raum. Dann folgten wieder verschiedene Arten der Figuren. Alle Figuren theilten wir in körperliche und Flächenfiguren, die Flächenfiguren in ebene und unebene, und die ebenen in geradlinige, krummlinige und vermischtlinige. Nun nahmen wir die geradlinigen noch besonders, und redeten von Dreyecken, Vierecken und Vielecken. Von den Dreyecken habe ich sechs Arten kennen gelernt, ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige, rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige. Von den Vierecken und Vielecken wurde nachher nicht weiter geredet, ich soll aber auch davon künftig noch mehr hören. Eine einzige krummlinige Figur kenne ich auch, den Kreis. Ich habe mir, so gut als ich gekonnt habe, gemerket, was man unter allen diesen Dingen versteht, und es würde nur gar zu lange dauren, sonst wollte ich alles herschreiben. Wenn Sie es erlauben wollen, bester Vater, so werde ich Ihnen künf-

tig öfter schreiben, was wir gehabt haben. Vielleicht lerne ichs auch künftig besser, als ich es jezt kann u. s. w.

L. Wenn Sie von allen den Gegenständen, wovon Sie gesagt, daß wir uns darüber unterredet haben, die Erklärung hätten aufschreiben wollen, so würde Ihr Brief freylich sehr lang geworden seyn. Gleichwohl wird es für Sie großen Nutzen haben, wenn Sie Sich alle die Erklärungen, die wir durchgenommen haben, ebenfalls aufsetzen, und das können Sie nun zu einer andern Zeit thun. Uebrigens haben Sie diese Arbeit, da es die erste von dieser Art ist, so gut gemacht, daß Sie zur Belohnung dafür diesen Brief, wenn Sie ihn rein abgeschrieben haben werden, Ihrem würdigen Vater übergeben sollen, um Ihm und Sich eine Freude zu machen. — Nun wollen wir die Mathematic von einer andern Seite kennen lernen, als sie sich Ihnen in unsern bisherigen Gesprächen gezeigt hat. Bis jezt hat die Mathematic Sie unterrichtet, und Sie haben gelernt; nun wird die Mathematic Ihnen Befehle geben, nnd Sie werden gehorsam seyn und darnach handeln müssen.

S. Ich will gern gehorchen, wenn nur die Befehle so sind, daß ich sie befolgen kann.

L. Schwer sind sie nicht, aber man siehts ihnen nicht so gleich an, daß es Befehle seyn sollen, und weiß noch weniger, ehe man sie oft befolgt hat, wie wichtig sie sind, und wie gut,

wenn man sich stets darnach richtet. Aus dieser Ursach läßt man sie oft aus der Acht. Sie folgen nun schon Ihren Eltern auf jeden Wink, und werden daher auch hier leichter Sich gut verhalten lernen als andere.

S. Welches sind denn die Befehle der Mathematic, ich bin recht begierig, sie kennen zu lernen?

L. Sie haben schon oft darnach gehandelt, ohne es gleichsam zu wissen.

S. Ich habe ja noch nie Mathematic getrieben, wie soll denn das möglich seyn? Sie machen mich immer begieriger zu erfahren, was Sie meinen.

L. Was thun Sie, wenn Ihnen zum gerade Schreiben zu Anfange und zu Ende der Zeile Punkte gemacht sind, und Sich nicht getrauen, damit auszukommen?

S. Ich ziehe mir eine Linie von dem einem Punkte zum andern.

L. Gesetzt aber, man hätte Ihnen zu mehr Zeilen, als Sie nöthig hätten, die Punkte bemerkt, und es schienen Ihnen zu viele da zu seyn, was machten Sie dann?

S. Ich zöge dann nur die Linien, die ich nöthig zu haben glaubte.

L. Und wenn Sie mit einmal eine Linie nicht lang genug ziehen könnten?

S. So zöge ich sie erst so lang, als ich könnte, und machte sie alsdann noch länger.

L. Eben das fordert nun die Mathematic von Ihnen. Sie müssen, so oft Ihnen Punkte bemerkt oder gegeben sind, zwischen welchen Ihnen gerade Linien nützlich seyn können, dergleichen gerade Linien ziehen, und wenn Linien nicht lang genug gezogen sind, dieselben, so weit als nöthig ist, verlängern.

S. Das ist allerdings nicht schwer. Aber wie weiß ich denn in der Mathematic, ob es nöthig ist, Linien zu ziehen, oder zu verlängern? Beym Schreiben ist mir das wohl bekannt.

L. Das muß nach der Absicht, die man hat, untersucht werden. Sie werden das in der Folge eben so gut beurtheilen lernen, als Sie es jezt beym Schreiben können.

S. Wenn das ist, so will ich diesem Befehle schon nachkommen. Sagen Sie mir nur, was ich ausserdem noch zu thun habe.

L. Können Sie wohl, wenn ich Ihnen einen Zirkel gebe, auf einer Ebene einen Kreis beschreiben.

S. O ja!

L. Versuchen Sie es mit diesem Zirkel.

(Der Lehrling versuchts, und es wird ihm zugleich gezeigt, wie ein Zirkel bey der Beschreibung eines Kreises am vortheilhaftesten gehalten werde, damit insbesondere die Weite der Füsse sich nicht ändere)

L. Wenn ich Ihnen nun einen gewissen Punkt vorschriebe, der der Mittelpunkt werden sollte, und eine Linie gäbe, welcher der Halbmes-

messer gleich seyn sollte, könnten Sie auch aus diesem Punkte einen Kreis beschreiben, worin der Halbmesser so groß als die gegebene Linie wäre?

S. Warum nicht? Ich kann ja die eine Spitze des Zirkels leicht in den gegebenen Punkt setzen, und den Zirkel so weit aufmachen, als die gegebene Linie lang ist.

L. Gut! So oft es nothwendig oder vortheilhaft seyn wird, beschreiben Sie also aus den gegebenen Punkten mit dem erforderlichen Halbmesser einen Kreis, denn dies ist das zweyte von dem, was die Mathematic verlangt.

S. Werde ich denn auch hier künftig lernen, wenn es nothwendig ist, oder nicht?

L. Sie werden es allerdings lernen, und um so viel besser, je öfter Sie nach dieser Vorschrift handeln werden. Jezt haben Sie Sich nur zu merken, was Sie thun müssen; wenn? das gehört für die Folge. Das kann ich Ihnen aber auch noch sagen, daß es bisweilen schon genug ist, wenn Sie Sich die gedachten Linien und Kreise nur als beschrieben vorstellen.

S. Dann ist es ja noch leichter, aber wie kann das genug seyn?

L. Sie werden es schon sehen. — — Wie würden Sie es denn aber wohl machen, wenn Sie von einer geraden Linie ein Stück, so groß als eine andere kleinere Linie, nehmen sollten?

S. Ich nähme die kleine Linie zwischen den Zirkel, und setzte dann den einen Fuß des Zirkels auf den Anfang der großen Linie, und

bemerkte mit dem andern Fuße den Ort, wo er diese Linie träfe.

L. Wir werden dies ebenfalls nöthig haben, und man nennt dies, von einer geraden Linie ein Stück abschneiden, das einer andern gegebenen geraden Linie gleich ist. — — Betrachten Sie nun die 30te Figur; was ist es für eine?

S. Ein Dreyeck.

L. Die Seiten AB und AC sind darin gleich.

S. Also ist es ein gleichschenkliges Dreyeck.

L. Recht! Aber fallen Ihnen darin nicht einige Punkte besonders auf?

S. Ja, die Spitzen der Winkel, oder die Punkte A, B und C.

L. Könnten Sie nun hier wohl die durchgenommenen Vorschriften befolgen?

S. Linien kann ich zwischen diesen Punkten nicht mehr ziehen, denn die sind schon da. Aber verlängern könnte ich die Seiten AB, AC und BC.

L. Aber wenn ich nun in der Seite AB den Punkt D noch bemerkte?

S. Dann könnte ich von D nach C eine gerade Linie ziehen.

L. Sonst nichts? Ist nun nicht von AB das Stück BD abgeschnitten?

S. Ja. Ich kann also wohl von BC und AC auch so ein Stück abschneiden?

L. Wenn aber BC zu klein wäre?

S. Von AC müßte es doch möglich seyn, denn AC ist ja so groß als AB.

L. Das

L. Das ist freylich richtig. Gesetzt nun, wir thäten es, und CE wäre nun so groß als BD, wie dann?

S. Nun könnte ich von E bis B, und auch von D bis E eine gerade Linie ziehen.

L. Wenn wir das nun wirklich thäten, so erhielten wir die 31te Figur. Wie die nun verändert ist! Wie viel Dreyecke wir da haben! Wie viel meinen Sie wohl?

S. Fünfe.

L. Wie, wenn ich sagte, zwölfe?

S. Das ist ja nicht möglich.

L. (Zeigt papierne Dreyecke nach der 31ten Figur geschnitten und gehörig auf einander gelegt, und zählt sie vor.)

S. Ja so! Aber dann nehmen wir ja manches zwey oder dreymal.

L. Das thun wir freylich. Allein geht das nicht auch recht gut an, daß wir uns erst einen Raum in die Linien AD, AE und DE eingeschlossen vorstellen, dann einen andern, wovon dieser allerdings ein Theil ist, von AD, AC und DC eingeschlossen, dann einen dritten von AB, AE und BE eingeschlossen u. s. w.?

S. O ja, aber nun will ich auch wohl mehrere Dreyecke finden.

L. Thun Sie es, fangen Sie aber von oben an, und machen Sie es auch hier so als beym Lesen, gehen Sie von oben nach unten, und von der Linken zur Rechten.

S. Das

S. Das Dreyeck ADE, das Dreyeck ABE, das Dreyeck ADC, das Dreyeck DFE, das Dreyeck DBF, das Dreyeck EFC, und das Dreyeck BFC.

L. Und doch haben Sie noch fünfe ausgelassen.

S. Ach das Dreyeck BDE, und das Dreyeck DEC.

L. Wo bleibt denn BDC und BEC und ABC? Wir wollen nun noch einmal alle Dreyecke aufsuchen, und mit diesen papiernen vergleichen. (Dies geschiehet). Nun betrachten Sie Fig. 32 die Linie AB. Wie könnten Sie dabey wohl die gelernten Vorschriften befolgen?

S. Ich könnte die Linie verlängern.

L. Was mehr.

S. (Besinnt sich, findet aber nichts)

L. Ist Ihnen blos eine Linie gegeben, oder auch Punkte?

S. Auch die Punkte A und B.

L. Und nun?

S. Ich kann aus A und B Kreise mit einem Halbmesser, der AB gleich ist, beschreiben.

L. Thun wir es, so erhalten wir die 33te Figur. Wie diese gegen die 32te verändert ist! Fallen Ihnen nicht wieder ein Paar Punkte auf?

S. Ja, die Punkte, wo sich die Kreislinien schneiden.

L. Wir wollen diese Punkte D und E nennen, und was können wir, da vorher schon die Punkte A und B gegeben sind, thun?

S. Von

S. Von D und E nach A und B gerade Linien ziehen.

L. So erhalten wir nun Fig. 34, und was finden Sie da für geradlinige Figuren?

S. Zwey Dreyecke, das Dreyeck DAB und das Dreyeck ABE.

L. Ist von A nach D wohl weiter oder näher als nach B?

S. Nein, denn A ist der Mittelpunkt eines Kreises, und D und B sind Punkte im Umkreise desselben.

L. Und ist von B etwa weiter oder näher nach D als nach A?

S. Nein, denn B ist auch der Mittelpunkt eines Kreises, und A und D liegen wieder in dem Umkreise desselben.

L. Also ist die Linie AD so groß als?

S. AB.

L. Und die Linie BD?

S. Auch so groß als AB.

L. AD ist also so groß als AB, BD ist auch so groß als AB, welche Linie ist also wohl größer, AD oder DB?

S. Es sind beyde gleich.

L. Ist es nicht auch so in dem Dreyecke ABE?

S. Ja.

L. Was sind die Dreyecke DAB und ABE also für welche?

S. Gleichseitige, denn es sind alle Seiten darin gleich.

L. Wie macht man also wohl ein gleichseitiges Dreyeck?

S. Man zieht erst eine Linie, dann beschreibt man zwey Kreise, deren Mittelpunkte in dem Anfange und Ende dieser Linie sind, und welche zum Halbmesser diese Linie haben. Diese Kreise schneiden sich, und von dem Punkte, wo sie sich schneiden, zieht man nun nach den Endpunkten der ersten Linie gerade Linien.

L. Sehen Sie, wie gut es ist, wenn man das thut, was die Mathematic fordert? Sie können nun schon ein gleichseitiges Dreyeck machen. — Hätten Sie es auch gekonnt, wenn ich die erste Linie gezogen hätte?

S. Warum nicht? dann hätte ich ja noch etwas weniger zu thun gehabt.

L. Also können Sie über einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben, denn so spricht man in diesem Falle. Man beschreibt alsdann ein Dreyeck, in welchem jede Seite so groß, als die gegebene Linie, und die gegebene Linie selbst eine Seite ist. — — Nun wollen wir uns noch einige andere Befehle von der Mathematic ausbitten, denn je mehrere wir uns merken, desto besser für uns. Einen haben Sie eben befolgt.

S. Ich?

L. Ja. Die Linie AD Fig. 34 war so groß als die Linie AB, und die Linie DB war auch so groß als die Linie AB, und was schlossen Sie daraus?

S. Daß

S. Daß die Linie AD und die Linie DB einander gleich sind.

L. Warum sind beyde Linien einander gleich?

S. Weil sie beyde so groß sind, wie die Linie AB.

L. Also sind zwey Linien gleich, wenn eine jede von ihnen so groß ist, als eine dritte?

S. Ja.

L. Was kann ich also von zwey Linien behaupten, so bald ich von ihnen weiß, daß eine jede einer dritten gleich ist?

S. Daß sie unter einander gleich sind.

L. Und dies kann ich nun nicht nur schliessen, sondern ich muß solches auch thun, so oft ich jenes weiß. — — Gesetzt aber, daß ich von zwey Winkeln wüßte, daß ein jeder derselben einem dritten gleich sey, könnte ich dann nicht auch sagen, daß beyde gleich seyen?

S. Ja.

L. Und wenn ich ein gleiches von zwey Figuren wüßte, würde ich nicht auch da so schliessen können?

S. Ja.

L. Also wollen wir uns merken, daß wir, so oft zwey Grössen einer dritten gleich sind, daraus schließen können und müssen, daß beyde gleich sind. So leicht dieser Satz ist, und so wenig wichtig er Ihnen vielleicht jezt scheint, so viel kommt gleichwohl auf ihn an, nur muß man ihn nicht bloß wissen, sondern ihn anwenden, so oft man kann — —. Doch um weiter

ter zu gehen, so stellen Sie Sich in Gedanken zwey Größen vor, die einander gleich sind, zwey gleiche gerade Linien zum Beyspiel, oder zwey gleiche Summen Geld, oder zwey gleiche Haufen Aepfel, oder was Sie sonst für Größen wollen. Ferner setzen Sie zu einer jeden dieser Größen gleich viel hinzu, verlängern Sie z. B. beyde gleiche gerade Linien um einerley Stück, oder denken Sie zu jeder der beyden gleichen Summen Geld noch eine andere eben so große Summe hinzu, und eben das thun Sie mit den beyden gleichen Haufen Aepfeln. Werden nun die beyden neuen Linien, die beyden neuen Summen Geld und die beyden neuen Haufen Aepfel auch gleich, oder ungleich seyn?

S. Sie werden auch gleich seyn.

L. Wie sind also, wenn ich zu gleichen Größen gleiche setze, die zusammengesetzten Größen beschaffen?

S. Sie sind auch gleich.

L. Wie aber, wenn ich von gleichen Grössen gleiches wegnehme?

S. Dann ist das, was übrig bleibt, auch gleich. Gestern gab mir mein Vater vier Groschen, und meiner Schwester auch vier Groschen. Da wir aber spatzieren giengen, gab ich einen Groschen aus, und meine Schwester auch einen. Nun haben wir beyde noch gleich viel.

L. Das Beyspiel war recht gut, und es ist doch also auch richtig, daß, wenn man von glei-

gleichen Größen gleiches wegnimmt, die übriggebliebenen Größen gleich sind?

S. Ja.

L. Gesetzt aber, ich hätte zwey gleiche Größen, und setzte zu der einen noch etwas hinzu, zu der andern aber nicht?

S. Dann hätten Sie keine gleiche Größen mehr, sondern die, wozu Sie etwas gesetzt hätten, wäre größer, als die andere.

L. Und wenn ich von der einen von zwey gleichen Größen etwas wegnähme, von der andern aber nicht?

S. Dann wäre die, wovon etwas weggenommen wäre, kleiner, als die andere.

L. Nun muß ich Ihnen einen Rath ertheilen, der sehr wichtig ist. Wenn Sie künftig Sich mit Linien und Winkeln und Figuren beschäftigen werden, so müßen Sie Sich, so oft Sie mehrere Linien, oder mehrere Winkel, oder mehrere Figuren haben, vor allen Dingen fragen, sind diese Linien, oder Winkel, oder Figuren gleich, oder nicht? Und wenn Sie nun nach aufmerksamer Betrachtung dieser Dinge und sorgfältiger Ueberlegung gefunden haben, daß eine Linie einer andern, oder eine Figur einer andern gleich ist, so setzen Sie in Gedanken ein Stück hinzu, oder nehmen etwas davon hinweg, und urtheilen dann nach den Grundsätzen, die eben da gewesen. Haben Sie aber mehrere Paare gleicher Linien, oder Winkel, oder Figuren gefunden, so setzen Sie gleiches zugleichem,

chem, oder nehmen Sie gleiches von gleichem hinweg, und schließen dann nach den Grundsätzen, die wir zuerst betrachteten. Noch sind Sie freylich nicht im Stande einzusehen, warum ich Ihnen dies zur Pflicht mache, aber Sie werden schon künftig den großen Nutzen davon kennen lernen. — — Wie aber denken Sie wohl zu erfahren, ob zwey oder mehrere Linien, oder Winkel oder Figuren gleich sind, oder nicht?

S. Ich muß sie messen?

L. Sind diese zwey Dreyecke gleich? (Zwey Stücke Papier, welche die Figur von Dreyecken haben und gleich sind, werden vom Lehrer gegeben.)

S. (Nachdem er versucht diese Dreyecke so auf einander zu legen, daß sie sich decken.) Ja, denn wenn ich beyde so auf einander lege, als ich gethan habe, so paßt das eine genau auf das andere.

L. Sie hätten auch sagen können, sie decken sich, denn diesen Ausdruck gebraucht man hier. — — Wenn sind also zwey oder auch mehrere Figuren einander gleich?

S. Wenn sie sich decken.

L. Wenn sind wohl zwey Winkel gleich? Nehmen Sie zum Beyspiel ein Paar Winkel in den Dreyecken, die Sie eben auf einander legten.

S. Ebenfalls, wenn sie sich decken.

L. Und

L. Und gerade Linien? Denken Sie Sich an ihrer Stelle ein Paar ausgedehnte Zwirnsfaden.

S. Sie sind auch gleich, wenn sie sich decken.

L. Wenn wir also wissen wollen, ob zwey oder mehrere gerade Linien, oder Winkel, oder Figuren unter einander gleich sind oder nicht, was haben wir zu thun?

S. Wir müssen zusehn, ob sie sich decken, oder nicht.

L. Die Regel ist gut, und Sie werden bald nöthig haben, sie anzuwenden. Suchen Sie Sich daher dieselbe zu merken. — — Gesetzt aber, daß umgekehrt zwey gerade Linien einander gleich sind, werden sie dann auch einander decken, oder wenigstens decken können?

S. Ja.

L. Wie muß ich sie aber auf einander legen, wenn sie sich wirklich decken sollen?

S. Ich lege nur ihre Anfangspunkte auf einander, so wie ich es mache, wenn ich wissen will, ob zwey Zwirnsfaden einander gleich sind.

L. Decken sich aber auch Winkel, wenn sie gleich sind?

S. Ja.

L. Aber wie muß ich sie auf einander legen?

S. Ihre Spitzen müssen erst zusammengelegt werden, und dann auch ein Schenkel von beyden Winkeln.

L. Wenn Sie künftig nach diesen Kenntnissen handeln werden, so werden Sie in der Mathematic große Schritte thun, zumal wenn Sie Sich gewöhnen, von mehrern gleichen Dingen immer eins anstatt des andern zusetzen. Da Sie das, worüber wir uns heute unterredet haben, schwerlich so leicht, als das, worüber wir in der verwichenen Woche sprachen, im Zusammenhange Sich werden vorstellen können, und es doch höchst nothwendig ist, daß Sie es recht geläufig inne haben, so habe ich Ihnen hier etwas aufgesetzt, was Sie nun recht fleißig durchlesen müssen.

Einige der ersten und nothwendigsten Regeln für den, der sich der Mathematic widmet.

1. So oft zwey Punkte gegeben sind, muß man sich zwischen denselben eine gerade Linie denken, und wenn solches einer vorgesetzten Absicht wegen vortheilhaft ist, diese gerade Linie auch wirklich ziehen.

2. Eine jede gerade Linie muß man sich, wenn ihre Gränzen nicht durchaus bestimmt sind, so weit, als es nüzlich seyn kann, verlängert vorstellen, und im nöthigen Fall auch diese Verlängerung sich sinnlich darstellen.

3. So oft es nüzlich oder nothwendig ist, muß man mit gegebenen Linien aus gegebenen Punkten Kreise beschreiben, oder beschrieben sich denken.

4. So bald man von zwey Größen weiß, daß eine jede von ihnen einer dritten gleich ist,

so kann und muß man von ihnen behaupten und sich merken, daß sie auch unter einander gleich sind.

5. Wenn man zu gleichen Größen andre ebenfalls gleiche hinzusetzen kann, so muß man solches in Gedanken oder wirklich thun, und von den zusammengesetzten behaupten und sich merken, daß sie gleich sind.

6. Wenn man von gleichen Größen andere ebenfalls gleiche wegnehmen kann, so muß man solches thun, und von den übrigbleibenden behaupten und sich merken, daß auch sie gleich sind.

7. Um die 4te, 5te und 6te Regel so oft als möglich befolgen zu können, muß man sich von jeder der Größen, mit welchen man sich beschäftiget, vor allen Dingen einen recht deutlichen und bestimmten Begrif zu erwerben suchen.

8. Wenn zwey ungleiche Größen gegeben sind, so muß man von der größern einen Theil absondern, welcher der kleinern gleich ist.

9. Wenn man zwey gleiche Größen hat, und es nützlich ist, sie in ungleiche zu verwandeln, so muß man zu der einen derselben entweder eine andere hinzusetzen, oder dieselbe davon wegnehmen, und sich dann merken, daß die veränderte Größe im ersten Fall größer, im andern aber kleiner ist, als die andere.

10. Wenn man von zwey geraden Linien weiß, daß sie gleich sind, so muß man in Gedanken ihre Anfangspunkte und die Linien selbst auf einander legen, und dann von ihren

Endpunkten sich merken und vorstellen, daß auch sie nun auf einander liegen, und die ganzen Linien sich also decken.

11. Wenn man von zwey Winkeln weiß, daß sie gleich sind, so muß man in Gedanken dieselben so auf einander legen, daß ihre Spitzen und ein Schenkel von beyden zusammenfallen, und dann von den übrigen Schenkeln behaupten und sich gegenwärtig erhalten, daß auch sie zusammenfallen.

12. Wenn man Größen hat, die man so auf einander legen kann, daß sie sich decken, so muß man so wohl von ihnen, als von ihren Theilen, die sich decken, behaupten und sich merken, daß die, die sich decken, gleich sind.

Fünftes Gespräch.

L. Es ist Ihnen bisher angenehm gewesen, wenn ich mich mit Ihnen über mathematische Gegenstände unterredet habe; allein von heute an werden Sie Sich freuen, denn nun fangen wir etwas wichtigeres an, wobey Ihnen aber das, was Sie gelernt haben, sehr zu statten kommen wird. Nehmen Sie nur die Regeln, welche ich Ihnen aufgesetzt habe, zur Hand, damit Sie gehörig und leicht selbst überlegen können, ob von denselben einige, und welche, angewandt werden können, und außerdem merken

ken Sie Sch, daß Sie es Sich nunmehr zur Pflicht machen müssen, so oft Ihnen mehrere gerade Linien, oder mehrere ebene und geradlinige Winkel oder verschiedene Dreyecke gegeben sind, zu untersuchen, ob dieselben unter einander gleich sind oder nicht, und Sich dann die Kennzeichen, nach welchen Sie darüber mit vollkommner Gewisheit urtheilen können, sorgfältig zu merken, und dieselben in der Folge, so oft als möglich, zu weitern Schlüssen zu gebrauchen. — — Betrachten Sie also die beyden Dreyecke Fig. 35 und 36, und sagen Sie mir, wie Ihnen dieselben beschaffen zu seyn scheinen?

S. Gleich.

L. Sind sie es auch wirklich?

S. Ja.

L. Was meinen Sie wohl von diesen beyden Dreyecken? (Der Lehrer zeigt zwey papierne Dreyecke, welche den Fig. 35 und 36 ähnlich sind, davon aber das eine zwey um etwas weniges kleinere Seiten hat als das andere, so daß man es nur erst nach einer sorgfältigen Vergleichung wahrnimmt.)

S. Sie sind auch gleich.

L. Wirklich?

S. O ja! denn sehen Sie nur. (Der Lehrling versucht, die beyden gedachten Dreyecke so auf einander zu legen, daß sie sich decken, findet aber nun, daß das eine größer ist, als das

andere). Nein, diese Dreyecke sind doch ungleich.

L. Nicht wahr, der Schein hat Sie verführt? Trauen Sie ja künftig dem Scheine nicht sogleich, er betriegt oft, und außerdem muß man auch in der Mathematic von allem, was man behauptet, Rechenschaft zu geben im Stande seyn, und dazu setzt uns der bloße Schein nicht in den Stand. Indeß kann doch auch oft auf der andern Seite der Schein uns nützlich werden, wenn wir nemlich dabey auch untersuchen, ob etwas wirklich so sey, als es scheinet; und so wollen wir es künftig, und so müssen wir es auch machen. — — Sind also die beyden Dreyecke Fig. 35 und 36 gleich?

S. Sie scheinen es zu seyn, aber gewiß weiß ich nicht, ob sie es sind.

L. Untersuchen Sie also dieselben genauer.

S. Aber wie? Wenn ich die beyden Dreyecke ausgeschnitten hätte, so wollte ich mir wohl helfen; aber so?

L. Und was würden Sie thun, wenn ich Ihnen dieselben ausgeschnitten gäbe?

S. Ich würde sie auf einander legen, und sehen, ob sie sich deckten.

L. Die Kupfertafel können wir durch Ausschneiden der Dreyecke Fig. 35 und 36 nicht verderben, und wenn uns also von diesen Dreyecken nicht etwa diese oder jene Eigenschaft gesagt wird, so werden wir auch nicht im Stande seyn zu beurtheilen, ob sie gleich oder ungleich

sind.

sind. Aber wie, wenn ich Ihnen sagte, daß die Seite AB in dem Dreyecke ABC, Fig. 35, der Seite DE in dem Dreyecke DEF, Fig. 36, gleich ist?

S. Dann kann ich vielleicht eine von den Regeln, die Sie mir gegeben, anwenden. (Denkt und sieht nach.) Ja, die 10te.

L. Wie so?

S. Ich lege die Linie AB in Gedanken auf die Linie DE, und zwar so, daß die beyden Punkte A und D gerade auf einander zu liegen kommen, und alsdann liegt auch der Punkt B auf dem Punkte E.

L. Setzt Sie dies aber in den Stand, zu sagen, ob die beyden Dreyecke ABC und DEF gleich sind, oder nicht?

S. Nein, denn wenn sie gleich seyn sollten, so müßte auch die Seite AC auf DF, und die Seite BC auf EF fallen, und das ist ja noch nicht nothwendig, wenn bloß die Seite AB auf die Seite DE gelegt wird, und beyde sich decken.

L. Wie müßten wohl, vorausgesetzt, daß AB so auf DE liegen bliebe als Sie vorhin gesagt haben, die Winkel A und D beschaffen seyn, wenn nun auch AC auf DF fallen sollte?

S. Sie müßten gleich seyn, denn alsdann könnte ich nach der 11ten Regel handeln.

L. Wo läge nun noch immer der Punkt A?

S. Auf dem Punkte D.

L. Wo würde aber der Punkt C hinfallen?

S. Das ist nicht ausgemacht, denn es kommt darauf an, wie groß AC ist. Wäre AC kleiner als DF, so fiele der Punkt C zwischen D und F; wären AC und DF gleich, so fiele der Punkt C auf F, und wenn endlich AC größer wäre als DF, so fiele der Punkt C über F hinaus.

L. Also einmal angenommen, daß nun auch AC und DF gleich sey, so läge der Punkt B?

S. Auf dem Punkte E.

L. Und der Punkt C?

S. Auf dem Punkte F.

L. Und die Seite BC?

S. Diese läge nun auf der Seite EF, und dann müßten die ganzen Dreyecke gleich seyn, denn sie deckten sich ja.

L. Was müßten Sie also nach dem bisherigen von den beyden Dreyecken ABC und DEF wissen, um behaupten zu können, daß beyde gleich sind?

S. Daß die Seite AB gleich der Seite DE, der Winkel A gleich dem Winkel D, und die Seite AC gleich der Seite DF sey.

L. Warum können Sie alsdann behaupten, daß die ganzen Dreyecke ABC und DEF gleich sind?

S. Weil ich alsdann diese Dreyecke so auf einander legen kann, daß sie sich decken.

L. Von wie viel Seiten mußten Sie wissen, daß sie einander gleich sind?

S. Von

S. Von zwey Seiten.

L. Und von wie viel Winkeln?

S. Von einem.

L. Wo lag aber dieser Winkel?

S. Zwischen den beyden gleichen Seiten.

L. Gesetzt nun, ich sagte Ihnen, daß in den beyden Dreyecken ABC und DEF, AB gleich DE, BC gleich EF, und der Winkel B gleich dem Winkel E sey?

S. So müßten diese beyden Dreyecke auch gleich seyn, denn ich könnte sie nun ebenfalls so auf einander legen, daß sie sich deckten.

L. Wie denn?

S. Ich legte die Seite AB auf die Seite DE, und zwar so, daß der Punkt B auf E läge, und dann würde der Punkt A auch auf den Punkt D fallen. Ferner legte ich den Winkel B auf den gleichen Winkel E, so fiele die Seite BC auf die Seite EF, und weil beyde gleich groß sind, und B auf E liegt, so müßte auch der Punkt C auf den Punkt F fallen. Endlich würde nun die Seite AC auf der Seite DF liegen, und die ganzen Dreyecke sich decken, und also gleich seyn.

L. Also wüßten Sie auch wohl gewiß, daß beyde Dreyecke gleich wären, wenn ich Ihnen sagte, AC ist gleich DF, BC gleich EF und C gleich F?

S. Ja, denn ich könnte es nun mit beyden Dreyecken wieder so machen, als vorher.

L. Ge-

L. Gesetzt aber, es würden Ihnen zwey andere Dreyecke gegeben, und Ihnen von denselben auf eine ähnliche Art gesagt, daß darin zwey Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel gleich wären, könnten Sie alsdann auch von diesen beyden Dreyecken behaupten, daß sie gleich wären?

S. Ja, denn es müßten sich diese Dreyecke so auf einander legen lassen, daß sie sich deckten.

(Der Lehrer hatte hier papierne Dreyecke von allen Arten derselben bey der Hand, und auf je zwey und zwey gleichen Dreyecken waren zwey gleiche Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel mit einerley Buchstaben des grössern und kleinern Alphabets bezeichnet. Der Lehrling mußte jedesmal mit zwey gleichen Dreyecken, nachdem ihm die gedachten gleichen Seiten nebst dem eingeschlossenen gleichen Winkel gezeigt worden, den Versuch machen, sie so auf einander zu legen, daß sie sich deckten. Nachdem dies geschehen, wurden noch einige blos gezeichnete Dreyecke beobachtet.)

L. Gesetzt nun, daß es Ihnen nicht möglich ist, zwey Dreyecke über deren Gleichheit oder Ungleichheit Sie ein Urtheil fällen sollen, wirklich auf einander zu legen, und ferner, daß man Ihnen von diesen Dreyecken nicht die geringste Beschaffenheit anzeigt; was sind Sie alsdann auch nur im Stande zu sagen?

S. Wei-

S. Weiter nichts, als ob sie mir gleich oder ungleich scheinen.

L. Wenn würden Sie aber wohl mit völliger Gewisheit urtheilen, daß beyde Dreyecke gleich seyn müßten?

S. Wenn ich zuvor wüßte, daß in beyden zwey Seiten und der Winkel, den sie einschliessen, gleich wären.

L. Und nun können Sie die Ihnen gegebenen zwölf Regeln mit einer neuen vermehren. So bald Sie nemlich von zwey Dreyecken wissen, daß zwey Seiten des einen zwey Seiten des andern, und überdem die Winkel, welche in beyden von diesen gleichen Seiten eingeschlossen werden, gleich sind, so können und müssen Sie auch behaupten, daß die ganzen Dreyecke gleich sind. — — Nun betrachten Sie die Dreyecke ABC und DEF Fig. 35 und 36 noch einmal. Wenn die Seite AB der Seite DE, die Seite BC der Seite EF, und der Winkel B dem Winkel E gleich ist, so schliessen Sie daraus?

S. Daß die ganzen Dreyecke einander gleich sind.

L. Warum?

S. Weil alsdann die Dreyecke so auf einander gelegt werden können, daß sie sich decken.

L. Wenn nun aber diese Dreyecke so auf einander gelegt sind, was deckt dann AC für eine Seite in dem Dreyecke DEF?

S. Die Seite DF.

L. Wie

L. Wie sind also auch diese beyden Seiten beschaffen?

S. Gleich.

L. Was deckt ferner der Winkel A für einen Winkel in dem Dreyeck DEF?

S. Den Winkel D.

L. Und der Winkel C?

S. Den Winkel F.

L. Wie sind also auch diese beschaffen?

S. Der Winkel A ist gleich dem Winkel D, und der Winkel C ist gleich dem Winkel F.

L. Wenn also zwey Dreyecke auf die Art gleich sind, daß sie sich decken, so ist eine jede Seite in dem einen Dreyecke einer Seite in dem andern, und ein jeder Winkel in dem einen Dreycke auch einem Winkel in dem andern gleich. Diese Regel müssen Sie Sich ebenfalls merken, denn wir werden sie oft gebrauchen. Aber noch eins. Ist es gleichviel, was für Seiten ich nehme? Kann ich z. B. auch sagen, daß die Seite AC in dem Dreyecke ABC der Seite EF in dem Dreyecke DEF gleich sey?

S. Nein.

L. Woran werde ich denn nun wohl erkennen, welche Seiten und welche Winkel jedesmal einander gleich sind.

S. Diejenigen, welche auf einander zu liegen kommen, sind gleich.

L. Richtig ist dies allerdings, indeß wird es doch gut seyn, daß wir uns ein etwas leichteres Kennzeichen aufsuchen. Betrachten Sie

also

also zu dem Ende die Seite AC in dem Dreyecke ABC und die Seite DF in dem Dreyecke DEF. Welchem Winkel steht AC gegenüber?

S. Dem Winkel B.

L. Welchem Winkel aber steht DF gegenüber?

S. Dem Winkel E.

L. Und wie waren B und E beschaffen?

S. Gleich.

L. Die Seiten AC und DF stehen also gleichen Winkeln gegenüber; und welche Seiten werden also gleich seyn?

S. Die, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen.

L. Nun wollen wir die Winkel betrachten. A war gleich?

S. D.

L. Und E gleich?

S. F.

L. Welcher Seite steht A gegenüber?

S. Der Seite BC.

L. D aber?

S. Der Seite EF.

L. Wie waren aber BC und EF beschaffen?

S. Gleich.

L. Ferner der Winkel C steht gegenüber?

S. Der Seite AB.

L. Und der Winkel F?

S. Der Seite DE.

L. Und wie waren AB und DE beschaffen?

S. Auch gleich.

L. Wel-

L. Welche Winkel sind also in zwey gleichen Dreyecken, die sich decken, einander gleich?

S. Die, welche gleichen Seiten gegenüberstehen.

L. Wenn also zwey Dreyecke auf die Art gleich sind, daß sie sich decken, so sind darin auch alle Seiten, welche gleichen Winkeln, und alle Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberstehen, einander gleich. Ein sehr wichtiger Satz! den man so oft anwenden muß, als man von zwey Dreyecken weiß, daß sie sich decken. Um ihn sogleich einmal anzuwenden, so betrachten Sie die 31 Figur, und darin die Dreyecke ABE und ADC. Erinnern Sie Sich noch, was wir, als wir sie neulich betrachteten, dabey behaupteten?

S. Daß AB und AC gleich wären, denn das Dreyeck ABC sollte ein gleichschenkliges Dreyeck seyn.

L. Nichts mehr?

S. Ja, nemlich daß BD gleich EC, denn wir hatten das letzte gerade so groß gemacht als das erste.

L. Wenn nun aber AB gleich AC und BD gleich EC ist, so können wir sehr bequem eine von unsern zwölf Regeln anwenden. Was für eine wohl?

S. (Nach Ueberlesung der gedachten Regeln.) Die 6te.

L. Und was lernen Sie durch die Anwendung dieser Regel?

S. Daß

S. Daß AD gleich ist AE.

L. Was wissen Sie also von den beyden Dreyecken ABE und ADC?

S. Daß AB so groß als AC, und AE so groß als AD.

L. Und von wie viel Seiten in diesen beyden Dreyecken wissen Sie also, daß sie gleich sind?

S. Von zwey Seiten.

L. Was brauchten Sie also nur noch zu wissen, um behaupten zu können, daß die ganzen Dreyecke gleich sind?

S. Daß die eingeschlossenen Winkel gleich sind.

L. Sind sie es?

S. Ja, denn in beyden Dreyecken ist ein und ebenderselbe Winkel von den gleichen Seiten eingeschlossen.

L. Also sind die ganzen Dreyecke gleich, und nach dem letzten Satze also auch?

S. Die Seite BE der Seite DC, der Winkel B dem Winkel C, und der Winkel D dem Winkel E.

L. Bey B und C und E und D sehe ich mehrere Winkel, welche meinen Sie? Hier ist es besser, jeden Winkel mit drey Buchstaben zu benennen.

S. Der Winkel ABE ist gleich dem Winkel ACD, und der Winkel ADC gleich dem Winkel AEB.

L. Sie nannten vorhin einen Winkel aus dem Dreyecke ABE zuerst, thun Sie es auch das zweyte mal, um der Ordnung willen.

S. Der Winkel AEB ist gleich dem Win- ADC.

L. Nun wollen wir aus dem vorgenommenen uns noch ein Paar Sätze ziehen, die uns künftig bey der Beurtheilung der Gleichheit gerader Linien und Winkel großen Nutzen stiften werden. Gerade Linien nemlich sind gleich, wenn sie Seiten von gleichen Dreyecken, die sich decken, sind, und gleichen Winkeln gegenüberstehen; Winkel aber, wenn sie sich in gleichen Dreyecken, die sich decken, befinden, und gleichen Seiten gegenüberstehen. Suchen Sie auch diese Sätze Sich zu merken, denn wir wollen zu einer andern Zeit sie gebrauchen, um daraus ein Paar Regeln zu machen, durch deren Befolgung sie erst recht wichtig werden. Denken Sie auch selbst darüber nach, und versuchen Sie, ob Sie vielleicht ohne meine Hülfe diese Regeln finden könnten.

Sechstes Gespräch.

L. Haben Sie über die beyden Sätze nachgedacht, mit welchen wir unsere gestrige Unterredung beschlossen?

S. Ja,

S. Ja, aber Regeln hab ich mir nicht daraus machen können.

L. Welches waren die Sätze?

S. Gerade Linien sind gleich, wenn sie Seiten von gleichen Dreyecken, die sich decken sind, und gleichen Winkeln gegenüberstehen; Winkel aber, wenn sie sich in gleichen Dreyecken, die sich decken, befinden, und gleichen Seiten gegenüberstehen.

L. Betrachten Sie die 31te Figur, und erinnern Sie Sich wieder an das, was wir gestern darüber gesprochen haben. Wie sind darin die Linien BE und DC beschaffen?

S. Sie sind gleich.

L. Warum?

S. Weil sie Seiten von gleichen Dreyecken, die sich decken, sind, und gleichen Winkeln gegenüberstehen.

L. Gesetzt, Sie betrachteten die beyden Linien BE und DC nicht als Seiten von Dreyecken, würden Sie dann wohl beurtheilen können, ob sie gleich oder ungleich wären?

S. Nein.

L. Gesetzt aber, daß Sie dieselben als Seiten von Dreyecken betrachten, und beurtheilen wollen, ob sie gleich sind, oder nicht; was haben Sie vor allen Dingen zu untersuchen?

S. Ob die ganzen Dreyecke gleich sind.

L. Und dann?

S. Ob darin die Seiten BE und DC gleichen Winkeln gegenüberstehen.

L. In der 31ten Figur sind nun diese Linien schon Seiten von Dreyecken. Gesetzt aber, wir sollten, Taf. 2, Fig. 38, untersuchen, ob die Linien AD und BC gleich wären oder nicht; könnten wir da auch diese Linien als Seiten von Dreyecken betrachten?

S. Nein.

L. So gleich freylich nicht. Aber wie, wenn wir, wie Fig. 39 geschehen ist, die Linie AC zögen?

S. Dann wohl.

L. Dadurch, daß wir diese Linie ziehen, wird in den Linien AD und BC nichts geändert, und es ist also allerdings erlaubt. Wüßten wir also etwa schon, daß die Linie AB der Linie DC, und der Winkel DCA dem Winkel BAC gleich wäre, so wäre nun auch gleich ausgemacht, daß das ganze Dreyeck DAC dem ganzen Dreyecke CAB, und also auch die Seite AD der Seite BC gleich sey. — — Was kann man also thun, wenn man die Gleichheit zwey gerader Linien beurtheilen soll?

S. Man kann sie als Seiten von Dreyecken betrachten, und untersuchen, ob die Dreyecke gleich sind.

L. Wenn sie aber sich noch nicht als Seiten in Dreyecken befinden?

S. So muß man noch Linien ziehen, daß man Dreyecke erhält, worin sie Seiten sind.

L. Dies ist daher die eine Regel, welche ich gestern beym Ende unserer Unterredung meinte:

te: Um zu beurtheilen, ob gerade Linien gleich sind oder nicht, mache man sie zu Seiten von Dreyecken, die sich decken, und schließe dann von der Gleichheit dieser Dreyecke auf die Gleichheit der gedachten geraden Linien. — — Könnten wir uns nun nicht aber auch eine ähnliche Regel von den Winkeln machen?

S. Ja. Wenn man wissen will, ob Winkel gleich sind oder nicht, so mache man die Winkel zu Winkeln von Dreyecken, die sich decken.

L. Diese Regeln wollen wir uns merken, wir werden vielleicht bald Gebrauch davon machen. — — Was steht Fig. 40 Taf. 2 für ein Dreyeck?

S. Ein gleichschenkliges.

L. Welches ist darin die Grundlinie?

S. Die Linie BC.

L. Und was liegen darüber für Winkel?

S. Die Winkel B und C,

L. Wie kann ich daher diese Winkel nennen?

S. Die Winkel über der Grundlinie.

L. Wie scheinen Ihnen diese beschaffen zu seyn?

S. Gleich.

L. Sind sie es auch wirklich?

S. Das weiß ich noch nicht, ich müßte sie erst genauer betrachten.

L. Und was würden Sie wohl vor allen Dingen thun, wenn Sie diese Winkel genauer untersuchen wollten?

S. Ach ich merke schon, wo Sie hin wollen. Nicht wahr, ich soll hier die Regel befolgen, die wir so eben gehabt haben?

L. Das ist allerdings mein Wille, und überhaupt müssen Sie alle Regeln, die Sie lernen, so oft Sie nur können, befolgen. — — Haben wir aber hier wohl nöthig, die Winkel B und C erst in Dreyecke zu bringen?

S. Nein, es sind ja schon Winkel in einem Dreyecke.

L. Aber wenn wir sagen, zwey Winkel sind gleich, weil sie sich in gleichen Dreyecken, die sich decken, befinden, und gleichen Seiten gegenüberstehen; sind dann die beyden gleichen Winkel in einem, oder in zwey Dreyecken?

S. In zwey Dreyecken, und wir müssen also doch Dreyecke machen.

L. Wie wollten Sie nun wohl ein Dreyeck machen, worin der Winkel B wäre?

S. Ich würde von dem Punkte C nach der Linie AB eine gerade Linie ziehen.

L. Alsdann erhielten wir die 41te Figur, und der Winkel B wäre in dem Dreyecke DBC. Versuchen Sie nun auch, den Winkel C zu einem Winkel eines Dreyecks zu machen.

S. Ich ziehe auch von B nach der Linie AC eine gerade Linie.

L. Ist es gleich viel, wie nahe nach A oder nach C zu?

S. Ja.

L. Müs=

L. Müssen wir aber nicht, um behaupten zu können, daß die Winkel B und C gleich sind, von den beyden Dreyecken, worin wir sie gebracht haben, auch zu zeigen im Stande seyn, daß sie gleich sind?

S. Ja.

L. Und was brauchen wir dazu? Wir können sie nicht wirklich auf einander legen.

S. Wir müssen wissen, daß darin zwey Seiten und der Winkel, den sie einschließen, gleich sind, und daß die Winkel B und C gleichen Seiten gegenüberstehen.

L. Was haben Sie mit dem Schenkel AB gemacht?

S. Ich habe davon das Stück BD abgeschnitten.

L. Können Sie nicht auch von dem ihm gleichen Schenkel AC ein eben so großes Stück abschneiden.

S. Ach ja, und dann ziehe ich von B nach dem Endpunkte dieses Stücks eine gerade Linie.

L. So erhalten wir nun die 42te Figur, und diese wollen wir nun recht aufmerksam, und mit Anwendung alles dessen, was wir bis jezt gelernt haben, betrachten. — — Was ist in den beyden Dreyecken DBC und EBC gleich?

S. Die Seite DB ist gleich der Seite EC.

L. Sonst nichts?

S. Nein.

L. Wovon müßten wir aber noch wissen, daß es gleich ist, um behaupten zu können, daß die ganzen Dreyecke gleich sind?

S. Noch von einer Seite und auch von einem Winkel in beyden Dreyecken.

L. Also zum Beyspiel?

S. Von den Seiten BE und DC, und von den Winkeln BDC und BEC.

L. Also von den Seiten BE und DC? sind dies nicht auch Seiten von andern Dreyecken?

S. Ja, von den Dreyecken ABE und ADC.

L. Und wie sind diese Dreyecke beschaffen?

S. Ach diese sind gleich, denn es ist hier eben so als Fig. 31, worüber wir gestern schon gesprochen haben, und BE ist also DC gleich.

L. Nun fehlt uns also noch, daß der Winkel BDC dem Winkel BEC gleich ist. — — Was ist in den Dreyecken ABE und ADC noch außer BE und DC gleich?

S. Der Winkel ABE ist gleich dem Winkel ACD, und der Winkel AEB gleich dem Winkel ADC.

L. Wie also, wenn wir Fig. 43 die Linie DE zögen, nach der allerersten von unsern Regeln?

S. Dann sind die beyden Dreyecke DEB und DEC einander gleich, denn DB ist gleich EC, BE ist gleich DC, und ABE gleich ACD.

L. Und was daher ferner?

S. Die Winkel BDE und DEC, ferner die Winkel DEB und EDC.

L. Nun

L. Nun haben Sie zwey Paar gleiche Winkel, und durch die Anwendung einer der letzt Ihnen gegebenen zwölf Regeln können Sie leicht finden, daß die Winkel BDC uud BEC gleich sind. Welche Regel wird dies wohl seyn?

S. (Nach Ueberdenkung der gedachten Regeln.) Die 6te.

L. Gut! Wie befolgen Sie diese Regel hier?

S. Ich nehme von einem jeden der größern Winkel BDE und DEC einen von den kleinern aber ebenfalls einander gleichen Winkeln EDC und DEB weg, und dann bleiben die Winkel BDC und BEC übrig, die also gleich seyn müssen.

L. Was können Sie also nun mit Gewisheit von den Dreyecken DBC und EBC behaupten?

S. Daß sie einander gleich sind, und daß auch der Winkel ABC dem Winkel ACB gleich ist.

L. Haben Sie aber auch die rechten Winkel gewählt?

S. Ja, denn sie stehen den beyden gleichen Seiten DC und BE gegenüber.

L. Wie sind also in dem betrachteten gleichschenkligen Dreyecke die Winkel über der Grundlinie beschaffen?

S. Sie sind einander gleich.

L. Nun stellen Sie Sich in Gedanken ein anderes, größeres oder kleineres, gleichschenkliges Dreyeck vor, was Sie für eins wollen,

wenn es nur ein gleichschenkliges ist. Werden wir mit demselben nicht alles das vornehmen können, was wir mit diesem vorgenommen haben?

S. Ja.

L. Wird nicht also auch eben das von einem jeden gleichschenkligen Dreyecke gelten, was wir von dem unsrigen behauptet haben?

S. Ja.

L. Wie sind also in einem jeden gleichschenkligen Dreyecke die Winkel über der Grundlinie beschaffen?

S. Sie sind einander gleich.

L. Nun wissen Sie eine sehr wichtige Eigenschaft der gleichschenkligen Dreyecke, die Sie neulich nur überhaupt kennen gelernt hatten. Benutzen Sie diese Kenntniß, so oft Ihnen ein gleichschenkliges Dreyeck vorkommt, und stellen Sie Sich dabey so gleich deutlich vor, daß die Winkel über der Grundlinie gleich sind. Damit Sie aber den Grund davon recht deutlich einsehen, will ich nun noch einige Fragen thun. — — Was kann man von den Winkeln über der Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreyecke behaupten?

S. Daß sie einander gleich sind.

L. Was hat man, wenn man diesen Satz beweisen will, für Veränderungen mit dem gleichschenkligen Dreyecke vorzunehmen?

S. Man

S. Man muß von beyden Schenkeln zwey gleiche Stücke abschneiden, und dann verschiedene Linien ziehen.

L. Thun Sie es. (Der Lehrling thut es an einem ihm gegebenen gleichschenkligen Dreyecke ABC, und die abgeschnittenen Stücke werden wie Fig. 43 benennt.)

L. Wie beweißt man nun, daß die Winkel ABC und ACB einander gleich sind?

S. Man zeigt zuerst, daß die beyden Dreyecke ABE und ADC gleich sind, und zieht daraus die Folge, daß die Seiten BE und DC, und die Winkel ABE und ACD gleich sind.

L. Warum sind die beyden Dreyecke ABE und ADC einander gleich?

S. Weil AB gleich ist AC, AE gleich AD, und der Winkel A zu beyden Dreyecken gehört, und zwischen den gleichen Seiten liegt.

L. Wie fährt man weiter fort?

S. Man zeigt nun, daß das Dreyeck DEB dem Dreyecke DEC gleich ist.

L. Wie so?

S. Die Seiten BD und EC sind gleich, ferner BE und DC, denn es ist bewiesen worden, und endlich die Winkel DBE und DCE, von welchen es auch gezeiget ist.

L. Was folgert man daraus?

S. Daß die Winkel BDE und DEC, so wie auch die Winkel EDC und DEB gleich sind, und nun wendet man die 6te Regel an, und findet, daß die Winkel BDC und BEC auch gleich sind.

L. Ist

L. Ist nun schon alles geschehen?

S. Nein, nun zeigt man noch, daß die beyden Dreyecke BDC und BEC, und folglich auch die Winkel DBC und ECB gleich sind, und dies sind die Winkel über der Grundlinie in dem gleichschenkligen Dreyecke ABC.

L. Wir haben von Winkeln über der Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreyecke gesprochen. Giebt es wohl auch Winkel unter der Grundlinie?

S. Nein.

L. Aber wenn ich, wie Fig. 37 in dem gleichschenkligen Dreyecke ABC geschehen ist, (die Linien BG und FC betrachten Sie noch nicht) die Schenkel verlängere?

S. Ja, dann.

L. Wie scheinen Ihnen denn in dieser Figur die Winkel unter der Grundlinie FBC und GCB beschaffen zu seyn?

S. Gleich.

L. Dem Scheine dürfen wir aber nicht trauen, wir müssen beweisen, und um beweisen zu können, einige Veränderungen mit dem gleichschenkligen Dreyecke, dessen Schenkel verlängert sind, vornehmen, so wie wir es vorhin thaten und künftig fast bey allen Beweisen werden thun müssen. Sie finden nun in der 37ten Figur schon alles gethan. Wie müssen wohl, wenn alles recht gemacht seyn soll, die beyden Linien BF und CG beschaffen seyn?

S. Gleich.

L. Und

L. Und wie wird dann AF und AG beschaffen seyn?

S. Auch gleich.

L. Ist das vortheilhaft, wenn wir wissen, daß außer AB und AC auch AF und AG gleich sey?

S. Ja, denn alsdann kann man hier leicht beweisen, daß die beyden Dreyecke ABG und AFC einander gleich sind.

L. Würde man dies auch beweisen können, wenn man nicht wüßte, daß AF und AG gleich sind?

S. Nein.

L. Vorausgesetzt nun, daß BF gleich CG und AF gleich AG, so ist es möglich, daß man die Gleichheit der beyden Winkel FBC und BCG, welche unter der Grundlinie des gleichschenkligen Dreyecks ABC entstehen, wenn man seine Schenkel verlängert, beweise. Man muß aber zu dem Ende darthun, daß zwey Dreyecke, worin sie Winkel sind, gleich sind. Welches werden diese seyn?

S. Die Dreyecke BFC und BCG.

L. Von was für Stücken in diesen Dreyecken wissen wir schon, daß sie gleich sind?

S. Von den Seiten BF und CG.

L. Nicht auch noch von andern?

S. Nein.

L. Zu was für einem Dreyecke gehört denn die Seite BC?

S. Die-

S. Diese gehört zu beyden. — Ja wir wissen doch noch von einer andern Seite, nemlich dieser BC, daß sie in beyden Dreyecken gleich sey.

L. Was brauchen wir also nur noch zu wissen?

S. Daß der in beyden Dreyecken von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel gleich sey.

L. Und dieser Winkel ist?

S. In dem Dreyecke FBC der Winkel bey B und in dem Dreyecke BCG der Winkel bey C.

L. Aber geht das wohl an, daß wir von diesen beyden Winkeln voraus schon wissen, daß sie gleich sind, wenn wir es von ihnen beweisen wollen?

S. Nein.

L. Das geht allerdings nicht, denn ich würde dann sagen müssen: Die beyden Dreyecke FBC und BCG sind gleich, weil BF gleich CG, und BC gleich BC, und der Winkel FBC gleich dem Winkel BCG. Wenn ich diese Folge schon wüßte, so brauchte ich sie ja nicht erst aus einer andern Behauptung herzuleiten. Also müssen wir eine andere Seite und folglich auch einen andern Winkel nehmen. Welches werden sie wohl seyn?

S. Die Seiten FC und BC und die Winkel BFC und BGC.

L. Nun müssen Sie diese als Seiten und Winkel in Dreyecken betrachten, und untersuchen

chen ob diese Dreyecke gleich sind, so daß sie sich decken. Dies alles vorausgesetzt, so werden Sie mir nun wohl antworten können. — Wenn in einem gleichschenkligen Dreyecke die beyden Schenkel verlängert sind, und man von den Winkeln unter der Grundlinie beweisen will, daß sie gleich sind, was hat man vor allen Dingen zu thun?

S. Man muß vom Ende der gleichen Schenkel an von den Verlängerungen der Schenkel zwey gleiche Stücke abschneiden.

L. Und wenn nun Fig. 37 das gegebene gleichschenklige Dreyeck wäre, und BF und CG gleich genommen wären, was hätte man ferner zu thun?

S. Die Linien BG und FC zu ziehen.

L. Und nun?

S. Nun muß man beweisen, daß die beyden Dreyecke ABG und AFC gleich sind, um daraus herzuleiten, daß die Seiten BG und FC, und die Winkel BGC und BFC gleich sind. Weiß man dies, so beweiset man, daß auch die Dreyecke BFC und BCG gleich sind, und folgert daraus endlich die Gleichheit der Winkel unter der Grundlinie, FBC nemlich und BCG.

L. Wie beweisen Sie also, daß die beyden Dreyecke ABG und AFC gleich sind?

S. Es sind darin zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, AB ist gleich AC, AG gleich AF, und der Winkel A gehört zu beyden Dreyecken.

L. Wie

L. Wie beweisen Sie aber, daß die beyden Dreyecke BFC und BCG gleich sind?

S. Ich muß erst die Folge ziehen, daß die Seite BG gleich der Seite FC, und der Winkel BFC gleich dem Winkel BGC ist, und dann sage ich wieder, daß die Dreyecke BFC und BCG gleich sind, weil zwey Seiten und der Winkel, den sie einschließen, in ihnen gleich sind. BF ist nemlich gleich CG, FC gleich BG und der Winkel bey F gleich dem Winkel bey G.

L. Was für eine von den Folgen, die hieraus fließen, ist nun zu unserer Absicht wichtig?

S. Daß der Winkel FBC dem Winkel BCG gleich ist, denn diese Winkel sind die Winkel unter der Grundlinie.

L. Sollten wir nun wohl nicht eben so, als wir mit dem gleichschenkligen Dreyecke Fig. 37, darin die Schenkel verlängert waren, verfahren, mit einem jeden andern gleichschenkligen Dreyecke mit verlängerten Schenkeln verfahren können?

S. Ja.

L. Und was können wir nun also auch jedesmal von einem gleichschenkligen Dreyecke, dessen Schenkel verlängert sind, behaupten?

S. Daß die Winkel unter der Grundlinie einander gleich sind.

L. Da wir nun dies wissen, so müssen wir auch, so oft es angeht, davon Gebrauch machen, und zu dem Ende auch selbst, wenn es nüzlich, die Schenkel, wenn sie noch nicht verlängert

sind,

sind, verlängern. — — Nun betrachten Sie das gleichseitige Dreyeck, Fig. 27. Ist das nicht auch zugleich ein gleichschenkliges?

S. Ja.

L. Welches sind denn die Schenkel?

S. HG und GI.

L. Wie sind also die Winkel H und I?

S. Gleich.

L. Aber sind nicht auch die Seiten HG und HI gleich?

S. Ja.

L. Also könnte ich ja auch diese wohl als die Schenkel betrachten?

S. O ja! Aber dann kann man auch die Seiten HI und IG als die Schenkel ansehen?

L. Ganz recht! Denn das macht nichts aus, daß die Grundlinie in diesen beyden leztern Fällen nicht so liegt, als in dem Dreyecke ABC Fig. 30. Denn wir verstehen ja unter der Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreyecke nicht gerade die Seite, die unten liegt, sondern die, welche den übrigen Seiten oder Schenkeln nicht gleich ist, oder wenigstens nicht als denselben gleich betrachtet wird. Gesetzt also, daß man die Seiten HG und HI als die Schenkel ansieht, so sind?

S. die Winkel G und I gleich.

L. Und wenn man endlich HI und IG als die Schenkel betrachtet?

S. Dann sind die Winkel H und G einander gleich.

L. In dem gleichseitigen Dreyecke GHI Fig. 27, ist also der Winkel H gleich dem Winkel I, der Winkel I aber auch gleich dem Winkel G; was folgt daraus?

S. Daß auch G gleich H ist.

L. Also alle drey Winkel sind unter einander?

S. Gleich.

L. Können wir das von einem jeden gleichseitigen Dreyecke behaupten?

S. Ja.

L. Also sind in einem jeden gleichseitigen Dreyecke alle Winkel?

S. einander gleich.

L. Abermals ein sehr wichtiger Satz. So oft man Ihnen also von einem Dreyecke sagt, oder Sie nach Untersuchung desselben wissen, daß es gleichseitig ist, so können sie sogleich sicher behaupten, daß darin auch alle Winkel unter einander gleich seyn müssen, oder daß das Dreyeck auch ein gleichwinkliges Dreyeck sey. — Hier will ich heute stehen bleiben. Setzen Sie Sich nun, so bald Sie Zeit haben, die Sätze, die wir bewiesen haben, doch ohne Beweis auf, und merken Sie dabey zugleich an, wie man dieselben anwenden könne. Haben Sie dies, wenn wir uns wieder unterreden wollen, gut gemacht, so sollen Sie alsdann einen andern ebenfalls sehr wichtigen Satz von den gleichschenkligen Dreyecken lernen.

Sie=

Siebentes Gespräch.

S. Ich habe die Sätze, welche ich neulich gelernt habe, aufgesetzt, und auch über den Beweis derselben nachgedacht. Die Sätze selbst und ihre Anwendung habe ich aber nur aufgesetzt. Wenn Sie mich indeß über den Beweis fragen wollen, so denke ich wohl antworten zu können.

(Der Aufsatz des Lehrlings war nach einiger Verbesserung folgender)

Einige Sätze
von den Dreyecken und ihre Anwendung.

1. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und der Winkel, welchen diese Seiten einschliessen, gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke gleich, und auch die Seiten, welche gleichen Winkeln, und die Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberstehen.

Wenn man also wissen will, ob zwey Dreyecke gleich sind oder nicht, so muß man sehen, ob man von zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel in denselben beweisen kann, daß sie gleich sind. Kann man das, so kann man auch behaupten, daß die ganzen Dreyecke, und auch, daß alle Seiten, die gleichen Winkeln, und alle Winkel, die gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich sind.

Ferner, wenn man wissen will, ob zwey gerade Linien oder zwey Winkel gleich sind, so muß man suchen, dieselben zu Seiten oder Winkeln in zwey Dreyecken zu machen, von denen man weiß, daß sie gleich sind. Hat man dies gethan und stehen die gedachten geraden Linien gleichen Winkeln, oder die Winkel gleichen Seiten gegenüber, so ist alsdann auch ausgemacht, daß sie gleich sind.

2. In einem jeden gleichschenkligen Dreyecke sind die Winkel über der Grundlinie gleich.

Wenn also ausgemacht ist, daß in einem Dreyecke zwey Seiten gleich sind, so kann man auch sogleich behaupten, daß die beyden Winkel über der Grundlinie (oder der dritten Seite) einander gleich sind.

3. Wenn man die Schenkel eines gleichschenkligen Dreyecks verlängert, so sind auch die Winkel unter der Grundlinie gleich.

4. In einem gleichseitigen Dreyecke sind alle Winkel einander gleich, und wenn man irgend zwey Seiten desselben verlängert, so sind auch die Winkel unter der dritten Seite einander gleich.

Wenn man also weiß, daß in einem Dreyecke alle Seiten gleich sind, so muß man solches auch so gleich von den Winkeln behaupten.

— — — L. Wir haben neulich gelernt, und sie haben es auch unter den aufgeschriebenen Sätzen bemerkt, daß in jedem Dreyecke zwey

Win-

Winkel gleich sind, wenn darin zwey Seiten es sind. Wie denn aber, wenn wir umgekehrt wüßten, daß zwey Winkel in einem Dreyecke gleich wären?

S. Dann müßten auch darin zwey Seiten gleich seyn.

L. Und das Dreyeck wäre also, was für eins?

S Ein gleichschenkliges.

L. Ist das so gleich ausgemacht, und dürfen wir es wohl, ohne es erst zu beweisen, behaupten?

S. O ja! denn wenn in jedem gleichschenkligen Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so muß ja auch ein Dreyeck gleichschenklig seyn, wenn es zwey gleiche Winkel hat.

L. Allein der Satz: Alle Menschen müssen sterben, ist doch wahr?

S. Ja.

L. Kann ich aber auch umgekehrt sagen: Alles, was sterben muß, ist ein Mensch?

S. Nein, denn die Thiere müssen ja auch sterben.

L. Kann ich also deswegen, weil in jedem gleichschenkligen Dreyecke zwey Winkel gleich sind, sogleich auch umgekehrt sagen, daß ein jedes Dreyeck, das zwey gleiche Winkel hat, auch ein gleichschenkliges seyn müsse?

S. Nein.

L. Richtig ist indeß der Satz. Allein da man als Mathematiker von allem, was man behauptet, Rechenschaft zu geben im Stande

seyn muß, so dürfen wir denselben nicht eher gebrauchen, bis wir ihn bewiesen haben. — —— Betrachten Sie also, Fig. 44, das Dreyeck DEF, in welchem die beiden Winkel E und F gleich gemacht sind. Wie scheinen Ihnen die Seiten DF und DE beschaffen zu seyn?

S. Gleich.

L. Sind sie es gewiß?

S. Das weiß ich noch nicht.

L. Gesetzt, daß sie nicht gleich wären, wie wäre dann DF gegen DE gehalten?

S. Entweder grösser oder kleiner als DE.

L. Also angenommen erstlich, daß DF grösser sey als DE. Was können Sie thun?

S. Ich kann alsdann von DF ein Stück abschneiden, das so groß ist als DE.

L. Sehen Sie nun die 45te Figur an. Das Dreyeck, welches Sie da sehen, ist eben das, welches Fig. 44 stand. Wäre DF grösser als DE, so könnten wir allerdings, wie Sie sagten, davon ein Stück, so groß als DE abschneiden. Da wir uns nun jezt vorstellen, daß DF grösser sey als DE, so sey GF das Stück von DF, welches so groß als DE genommen werden kann. Von G ziehen wir nach C, nach der ersten von unsern zwölf Regeln, eine gerade Linie. Vergleichen Sie nun die 45te Figur mit diesen papiernen Dreyecken, (Zwey papierne Dreyecke, den Dreyecken DEF und GEF in der Figur gleich, und eben so auf einander liegend, werden

den gezeigt) wie viel Dreyecke fallen Ihnen so gleich auf?

S. Zwey, das Dreyeck DEF und das Dreyeck GEF.

L. Was ist davon in Ansehung der Grösse wohl ganz offenbar? Sind sie gleich?

S. Nein, sie sind ungleich, das Dreyeck DEF ist grösser als das Dreyeck GEF.

L. Das ist also völlig ausgemacht. Nun waren aber in dem Dreyecke DEF Fig. 44. die Winkel E und F gleich, und das Dreyeck DEF Fig. 45 ist von demselben in keinem Stücke unterschieden. Sollten daher nicht in den beyden Dreyecken DEF und GEF Fig. 45 ein Paar Winkel gleich seyn?

S. Ja, der Winkel bey E in dem Dreyecke DEF ist dem Winkel F in dem Dreyecke GEF gleich.

L. Und wie sind die Seiten, welche in diesen Dreyecken diese gleichen Winkel einschliessen, beschaffen?

S. (Nach sorgfältiger Betrachtung der gedachten Dreyecke) Auch gleich. DE ist nemlich gleich GF, denn wir haben GF gleich DE genommen, und EF gehört zu beyden Dreyecken.

L. Also müßten nun auch beyde Dreyecke DEF und GEF gleich oder ungleich seyn?

S. Sie müßten gleich seyn. Aber (sich wundernd) das geht ja nicht an, denn sie sind ja offenbar ungleich.

L. Freylich können die beyden Dreyecke nicht gleich und ungleich zu gleicher Zeit seyn. Allein überlegen Sie ja alles, was wir gehabt haben, genau. Was setzten wir gleich zu Anfange von den Winkeln E und F Fig. 44 vest?

S. Daß sie gleich seyn sollten.

L. Und was schien uns statt zu finden?

S. Daß die Seiten DF und DE einander gleich wären.

L. Um nun mit Gewisheit zu erfahren, ob das auch in der That sey, stellten wir uns vor, DF sey grösser als DE. Nehmen wir aber das an, so können wir von der grössern Seite DF das Stück GF, der Seite DE gleich, abschneiden, die Linie GE ziehen, und dann von zwey offenbar ungleichen Dreyecken beweisen, daß sie gleich seyn müßten. Kann also wohl DF, vorausgesetzt daß die Winkel E und F gleich sind, grösser seyn als DE?

S. Nein.

L. Wir kommen ja, wenn wir die Folgen betrachten, auf etwas ganz ungereimtes, und das kann nicht wahr seyn, woraus etwas falsches fließt, so wenig als das etwas gutes, was eine Quelle des Bösen ist. Grösser also als DE kann die Seite DF nicht seyn, und wenn Sie wollen, so können Sie solches noch auf eine andre Art an der 46ten Figur lernen. Wenn DF grösser ist als DE, so ist natürlicher Weise DE kleiner als DF, und so wie wir dann von DF ein Stück, so groß als DE abschneiden können, so können

wir

wir auch zu DE ein Stück setzen, so daß DE mit diesem Stücke zusammengenommen so groß ist, als DF. Nun sey Fig. 46. DG dieses Stück und GE also gleich DF, und alles übrige sey auch jezt wie vorhin — —

S. (Fällt ein) Also sollen auch wohl hier wieder die beyden Dreyecke DEF und GEF gleich seyn?

L. Das würde allerdings folgen, aber wie?

S. (Denkt erst eine Weile nach) Ja, denn DF in dem Dreyecke DEF ist gleich GE in dem Dreyecke GEF, und EF gehört zu beyden, und der Winkel bey F in dem Dreyecke GEF ist gleich dem Winkel E. Aber diese Dreyecke sind wieder offenbar ungleich.

L. Allerdings sind sie ungleich, denn das Dreyeck DEF ist ja nur ein Theil von dem Dreyecke GEF, und kann also wohl DE kleiner seyn als DF?

S. Nein.

L. Wie sind also die Seiten DF und DE beschaffen?

S. Gleich.

L. Wie aber wenn ich sagte, DE wäre grösser als DF?

S. Ja, so wären sie doch nicht gleich.

L. Nicht wahr, Sie glaubten schon ganz gewiß zu wissen, daß DE und DF gleich sind, und nun stoßt Ihnen doch noch eine Schwierigkeit auf. Allein was machten Sie vorhin,

da DF als die grössere, und DE als die kleinere Seite angenommen wurde?

S. Ich schnitt von DF ein Stück, so groß als DE ab, oder setzte zu DE so viel hinzu, daß DE und DF gleich waren, und zog darauf Linien.

L. Und wenn nun DE grösser wäre als DF, was könnten und würden Sie thun?

S. Ach so! ich schnitte dann von DE ein Stück so groß als DF ab, oder setzte zu DF so viel hinzu, daß DF und DE gleich wären. Ja nun weiß ichs schon, dann würden die Figuren nur umgekehrt seyn.

L. Ganz recht! Weil Sie es denn schon wissen, so brauche ich mich wohl nicht länger dabey aufzuhalten?

S. O nein, das weiß ich.

L. Ich werde aber doch so lange noch etwas Mistrauen in diese Versicherung setzen, bis Sie mich davon überzeugt haben. Ich werde Ihnen also nachher die 45te und 46te Figur umgekehrt gezeichnet geben, und Sie setzen dann den Beweis des Satzes auf, daß DE und DF, wenn die Winkel DEF und DFE gleich sind, nicht ungleich seyn können.

S. Das weiß ich nicht, ob ich es können werde, ich habe dergleichen noch nie gethan.

L. Da Sie über viele andere Gegenstände sonst schon Ihre Gedanken aufzuschreiben versucht haben, so kann ich Ihnen, da Sie sagen, daß Sie diesen Beweis wissen, nicht helfen. Machen Sie wenigstens den Versuch, das übri-

ge

ge soll sich dann schon finden. — — Nun können und müssen Sie Sich aber auch merken, daß man ein gleichschenkliges Dreyeck an zwey gleichen Winkeln erkennen könne, und so oft Ihnen ein Dreyeck vorkommt, wovon Sie wissen, daß zwey Winkel darin gleich sind, so vergessen Sie nie, sogleich auch Sich vorzustellen, daß es ein gleichschenkliges Dreyeck sey, und zwar so, daß die Linie, über welcher die beyden gleichen Winkel liegen, die Grundlinie ist. — — Was werden wir denn aber wohl von einem Dreyecke behaupten können, wenn wir wissen, daß darin alle Winkel gleich sind?

S. (Nach einigem Nachdenken) Dann ist das Dreyeck ein gleichseitiges.

L. Gut, auch dies wollen wir uns merken. Es wird schon die Zeit kommen, daß wir davon Gebrauch machen können. Ueberhaupt ist das, was Sie jetzt lernen, nur Saame noch, die Erndte folgt künftig. Je fleissiger Sie säen, (das heißt, die Anfangssätze erlernen), desto reichlicher werden Sie künftig erndten können.

Achtes Gespräch.

In Ansehung des nach dem vorhergehenden Gespräche aufzusetzenden Beweises war es bey einem blossen Versuche geblieben, indeß doch, wie solches auch die Hauptabsicht war, durch die Aufgabe desselben die Neigung und Stetig-

keit auch den zweyten Fall sorgfältig zu betrachten erwirkt worden. Solches geschahe also nun auf eine ähnliche Art, als im siebenten Gespräche beym ersten Falle, und damit wurde zugleich eine Anleitung den Beweis selbst aufzusetzen verbunden.

L. Wie scheinen Ihnen die beyden Dreyecke ABC Fig. 47. und DBC Fig. 48 beschaffen zu seyn, gleich oder ungleich?

S. Sie scheinen mir gleich zu seyn.

L. Wir wollen also untersuchen, ob sie es wirklich sind, doch so, daß wir von keinem Winkel voraussetzen, daß er in beyden Dreyecken gleich sey. — —

S. Das geht ja aber nicht, denn von einem Winkel müssen wir es ja wenigstens wissen.

L. Freylich, wenn wir nach der vor einiger Zeit durchgenommenen ersten Regel zur Beurtheilung der Dreyecke entscheiden wollten; allein mit dieser Regel allein dürfen wir nicht zufrieden seyn, wir müssen noch mehrere aufsuchen und uns bekannt machen. — — Gesetzt also, wir wüßten, daß BC in beyden Dreyecken gleich wäre?

S. Daraus könnten wir noch nichts schliessen, wir haben den Fall schon einmal untersucht.

L. Also will ich Ihnen sagen, daß auch die Seite AB Fig. 47. der Seite DB Fig. 48 gleich ist.

S Das reicht auch noch nicht hin, denn wir wissen von den Winkeln B nichts.

L. Ich

L. Ich will also auch noch hinzusetzen, daß AC gleich DC. Hieraus läßt sich nun allerdings herleiten, daß die beyden Dreyecke Fig. 47 und 48 so gleich sind, daß sie, gehörig auf einander gelegt, sich decken. Wie aber? Fangen Sie einmal an, die genannten Dreyecke in Gedanken auf einander zu legen, und zwar mit der Seite BC. Können sie BC in dem Dreyecke ABC so auf BC in dem Dreyecke DBC legen, daß beyde sich decken?

S. Ja, denn BC soll ja in beyden Dreyecken gleich seyn.

L. Wo werden nun aber AB und AC hinfallen?

S. Das weiß ich nicht. Wenn die Winkel B und C in beyden Dreyecken gleich wären, so müßte nun AB auf DB, und AC auf DC zu liegen kommen, aber von den Winkeln weiß ich nichts.

L. Gesetzt aber der Punkt A fiele auf D, wie dann?

S. Dann müßten AB und AC freylich auch auf DB und DC fallen.

L. Gut! Lassen Sie uns also untersuchen, ob der Punkt A, vorausgesetzt, daß in beyden Dreyecken alle drey Seiten einzeln einander gleich sind, und BC in ABC so auf BC in DBC liege, daß sie sich decken, ob sage ich dann der Punkt A anderswohin als in D zu liegen kommen könne? Gesetzt also erstlich, daß er in die Linie DB zwischen D und B fiele, und also die

Drey=

Dreyecke so auf einander lägen, als es die 50te Figur zeigt; wie wären nun AB und DB beschaffen?

S. DB wäre grösser als AB.

L. Soll das seyn?

S. Nein AB und DB sollen gleich seyn.

L. Ist es also wohl möglich daß A unter den vorausgesetzten Bedingungen in DB zwischen D und B falle?

S. Nein das geht nicht an.

L. Aber vielleicht in die verlängerte DB über D hinaus, wie Fig. 49?

S. Nein, das geht auch nicht an, denn alsdann wäre AB grösser als DB, und beyde sollen ja gleich seyn.

L. Sollte aber nicht etwa der Punkt A in die Linie DC zwischen C und D, oder in die verlängerte Linie DC über D hinaus fallen können?

S. Nein, das kann nicht seyn, denn sonst müßte entweder AC kleiner oder grösser als DC seyn, und wir haben von von diesen beyden Seiten ebenfalls angenommen, daß sie gleich sind.

L. Der Punkt A kann also bey der versuchten Aufeinanderlegung der Dreyecke ABC und DBC weder in die Seiten DB und DC selbst, noch in ihre Verlängerungen fallen, weil sonst Seiten, die gleich seyn sollen, ungleich seyn müßten. Aber vielleicht kann er auf der Seite zu

liegen

liegen kommen, wie Fig 51? (Die Linie AD betrachten Sie jezt noch nicht)

S. Ja, das kann vielleicht seyn, indeß scheint mir da doch die Seite DB grösser als AB.

L. Dies wird uns wohl nichts helfen können, denn es könnte der Punkt D weiter nach C zu liegen.

S. Aber dann würde auch DC kleiner, und diese Seite scheint so schon kaum so groß als AC zu seyn.

L. Es ist das allerdings richtig, aber Sie müssen doch blos sagen, es scheint, und das ist nicht genug. Wir wollen also lieber genauer untersuchen. Es falle also der Punkt A auf die Seite, wie Fig. 51. — — Aber zuvor noch eine Frage! Warum mag hier wohl die Linie AD gezogen seyn? Ist das etwa nach einer Regel geschehen?

S. Ja es kann nach der ersten Regel geschehen seyn, denn man soll ja darnach zwischen jeden zwey Punkten, wo es nüzlich seyn kann, eine gerade Linie ziehen.

L. Darnach ist es auch in der That geschehen, und wir werden bald sehen, wozu sie hier nüzlich ist. Indeß nennen Sie mir jezt einmal alle die Dreyecke, welche Sie in der 51ten Figur wahrnehmen.

S. Es sind sehr viele. Das Dreyeck ABC, das Dreyeck ADB, das Dreyeck ADC, das DBC, und noch vier kleine, die ich aber nicht benen-

nen

nen kann, weil da, wo sich die beyden Linien AC und DB schneiden, kein Buchstabe gesetzt ist.

L. Sind darunter nicht einige von der Art, als wir nun schon genauer betrachtet haben, gleichschenklig zum Beyspiel, oder gleichseitig? Sie müssen das immer vor Augen behalten, was wir von den beyden Dreyecken ABC und DBC angenommen haben.

S. Ja, das Dreyeck ADB ist ein gleichschenkliges.

L. Nicht ausserdem noch eins?

S. Ja, auch das Dreyeck ADC.

L. Und was haben wir zu thun, so bald wir wissen, daß ein Dreyeck gleichschenklig ist?

S. Ich weiß es schon. In dem gleichschenkligen Dreyecke ADB ist der Winkel BAD gleich dem Winkel ADB, und in dem gleichschenkligen Dreyecke ADC der Winkel CAD gleich dem Winkel ADC.

L. Sollte das alles wohl mit einander bestehen können?

S. Warum nicht?

L. Ist nicht der Winkel CAD nur ein Theil von dem Winkel BAD, und also auch kleiner als BAD?

S. Ja.

L. Und welcher Winkel war dem Winkel BAD gleich?

S. Der Winkel ADB.

L. Es ist also der Winkel CAD kleiner als der Winkel BAD, und ADB ist so groß als BAD. Wie wird also wohl CAD gegen ADB gehalten seyn?

S. Auch kleiner als ADB.

L. Der Winkel CAD ist allerdings unter den vorausgesetzten Bedingungen kleiner als der Winkel ADB. Wie ist nun aber ADB gegen ADC gehalten?

S. ADB ist kleiner als ADC.

L. Es ist also der Winkel CAD kleiner als der Winkel ADB, und der Winkel ADB ist kleiner als der Winkel ADC. Wie wird also wohl der Winkel CAD, gegen den Winkel ADC gehalten, beschaffen seyn?

S. Der Winkel CAD muß kleiner seyn als der Winkel ADC.

L. Aber das Dreyeck ADC ist ein gleichschenkliges Dreyeck, und AD darin die Grundlinie. Wie sollten also daher die Winkel CAD und ADC beschaffen seyn?

S. Gleich.

L. Nehmen wir also an, daß in den beyden Dreyecken Fig. 47 und 48, die Seiten einzeln genommen einander gleich sind, und legen sie dann so auf einander, als die 51te Figur es zeigt, so sind wir gezwungen zu behaupten, einmal, daß der Winkel CAD kleiner sey als der Win-

kel ADC, und nachher, daß auch CAD so groß sey als ADC. Kann das mit einander bestehen?

S. Nein.

L. Können also die Dreyecke ABC und DBC Fig. 47. und 48. wenn man ihre Seiten BC auf einander legt, so fallen, als Fig. 51?

S. Nein.

L. Das heißt, der Punkt A kann nicht ausserhalb des Dreyecks DBC auf der Seite zu liegen kommen.

S. Aber es scheint ja auch alles ganz anders zu seyn, wenn man die 51te Figur betrachtet. Wir behaupteten zum Beyspiel, daß der Winkel BAD dem Winkel ADB gleich sey, und das sieht man ja in der Figur ganz deutlich, daß es nicht ist.

L. Man hat bey solchen Fällen, als wir jetzt einen betrachten, sich sehr vor dem Scheine zu hüten. Uberlegen Sie also noch einmal. Was haben wir von AB und DB angenommen?

S. Daß sie gleich sind.

L. Also ist das Dreyeck ABD?

S. Ein gleichschenkliges.

L. Und die Winkel über der Grundlinie, BAD und ADB?

S. Sind einander gleich.

L. Vor-

L. Vorausgesetzt, daß AB und DB gleich sind, so müssen auch BAD und ADB gleich seyn, denn in jedem gleichschenkligen Dreyecke sind die Winkel über der Grundlinie einander gleich. Allein daß die Zeichnung Fig. 51 diese Winkel nicht gleich vorstellt, das kommt daher, weil eigentlich bey unsern Voraussetzungen der Punkt A auf D fallen muß. So bald A ausserhalb fallen soll, so können die Voraussetzungen nicht statt finden.

S. Aber das lezte habe ich vorhin auch noch nicht verstanden. Der Winkel BAD sollte dem Winkel ADB gleich seyn. Wenn AB gleich DB, und AC gleich DC, so ist das auch richtig. Aber wie nun weiter?

L. Wir wenden bey den ersten beyden gleichen Winkeln die 9te Regel an, und vergleichen das, was wir heraus bringen, mit dem von den andern beyden behaupteten. Ueberlesen Sie diese 9te Regel. — — Da BAD gleich ADB, so lassen wir von BAD das Stück BAC weg, und sagen, CAD ist kleiner als ADB. — —

S. Das sehe ich nun ein.

L. Nun setzen wir zu ADB noch das Stück BDC hinzu und sagen, der Winkel CAD ist um so mehr kleiner als ADC.

S. Das folgt auch ganz leicht.

L. Aber da das Dreyeck ADC gleichschenklig seyn soll, so ist CAD gleich ADC.

S. Nun verstehe ichs, dies streitet mit dem andern, und wenn wir annehmen wollten, daß der Punkt A ausserhalb fiele, so würden wir auf etwas falsches geführt werden können. Es sind also auch nun wohl zwey Dreyecke gleich, wenn alle drey Seiten in beyden gleich sind?

L. Könnten wir nicht auch annehmen, daß die Dreyecke Fig. 47 und 48, wenn die Seiten BC zusammengelegt werden, so fielen, als Fig. 52 es vorstellt? Die punktirten Linien betrachten Sie aber noch nicht.

S. Ja, es ist wahr. Die punktirten Linien brauchen wir wohl wieder zum Beweise?

L. Ganz recht! Nach was für Regeln werden sie wohl gezogen seyn?

S. Nach der ersten und zweyten.

L. Sehen Sie nicht auch in dieser Figur gleichschenklige Dreyecke?

S. Ja, das Dreyeck ADB und ADC.

L. Was ist mit dem einen geschehen?

S. Die Schenkel sind verlängert. — Es ist also auch die Regel befolgt, die Sie mir lezt von den gleichschenkligen Dreyecken gegeben haben, daß man nemlich bisweilen die Schenkel verlängern müsse, um Winkel unter der Grundlinie zu erhalten.

L. Was

L. Was werden wir also hier für gleiche Winkel haben?

S. Der Winkel EAD ist gleich dem Winkel ADF, und der Winkel CAD gleich dem Winkel CDA.

L. Sollte das wohl zusammen bestehen können? Der Winkel CAD ist gleich dem Winkel ADF; der Theil von EAD aber CAD ist gegen ADF gehalten?

S. Kleiner als ADF.

L. CAD also gegen den noch grössern Winkel CDA gehalten?

S. Muß um so mehr kleiner seyn.

L. Der Winkel CAD ist also auf diese Art kleiner als CDA. Weil sie aber auch Winkel über der Grundlinie in dem gleichschenkligen Dreyecke ADC sind, so müssen sie seyn?

S. Gleich. — — Dies habe ich leichter verstanden. Also können die beyden Dreyecke Fig. 47 und 48 auch nicht so auf einander liegen, als Fig 52, und nun ist es also doch nicht möglich, daß man noch einen andern Fall hinzusetzen könne?

L. Nein, nun können wir den Satz vestsetzen, daß zwey Dreyecke, die alle Seiten, einzeln genommen, gleich haben, auch so gleich sind, daß sie sich decken, und in der Folge ist es uns

also auch erlaubt, ja Pflicht für uns, die Gleichheit zwey oder mehrerer Dreyecke hiernach zu beurtheilen. Untersuchen Sie nun die Winkel die auf einander liegen, so werden Sie bald sehen, daß diejenigen, die sich decken oder gleich sind, auch immer gleichen Seiten gegenüberstehen. Diese Bemerkung kann uns bey der Beurtheilung der Gleichheit der Winkel Nutzen stiften. — — Das nächstemal wollen wir uns nun noch auf eine andere Art von dem heute erwiesenen Satze überzeugen, und dann ehe wir weiter gehen, vor allen Dingen den Weg, den wir bereits zurück gelegt haben, noch einmal durchlaufen.

Neuntes Gespräch.

L. Nun wollen wir noch ein Paar Dreyecke nemlich ABC Fig. 53. und ADC Fig. 54. unter den Bedingungen betrachten, daß AC in beyden gleich, und ausserdem auch AB gleich AD und BC gleich DC sey. Wenn wir hier die beyden gleichen Seiten AC auf einander legen, so daß sie sich decken, die Dreyecke selbst aber nicht auf einander, sondern in einer Ebene neben einander legen, so sind sie in der Lage, welche die 55ste Figur vorstellt, und BC und CD liegen in einer geraden Linie. Was machen nun

nun beyde Dreyecke, so an einander gelegt, für eine Figur?

S. Wieder ein Dreyeck.

L. Aber was für eins?

S. Ein gleichschenkliges, denn die Seiten AB und AD sind gleich.

L. Was können wir daher behaupten?

S. Daß die Winkel B und D gleich sind.

L. Dies sehen wir auf diese Art mit vollkommener Gewisheit. Was können wir aber, wenn wir von den beyden Dreyecken ABC und ADC Fig. 53. 54. ausser dem, was von den Seiten vorausgesetzt ist, auch wissen, daß die Winkel B und D gleich sind, behaupten? Betrachten Sie die Seiten, welche diese gleichen Winkel einschliessen.

S. Dann können wir behaupten, daß die ganzen Dreyecke gleich sind, denn es sind in beyden zwey Seiten und der Winkel, den sie einschliessen, gleich.

L. Was machen wir hier mit den beyden Dreyecken, wovon wir wissen, daß darin alle Seiten gleich sind, um uns von der Gleichheit der ganzen Dreyecke zu überzeugen?

S. Wir legen die Dreyecke neben einander, so daß zwey gleiche Seiten sich decken. Nun machen beyde Dreyecke ein gleichschenkliges Dreyeck, worin also die Winkel an der Grundlinie gleich sind.

L. Wo liegen aber diese gleichen Winkel? in einem oder in allen beyden gegebenen Dreyecken?

S. Der Winkel B liegt in dem Dreyecke ABC und die Winkel D in dem Dreyecke ADC.

L. Wie schliessen wir also weiter?

S. Da nun diese Winkel Winkel in den Dreyecken ABC und ADC sind, und die Seiten, welche sie einschliessen, gleich sind, so müssen auch die ganzen Dreyecke gleich seyn.

L. Auch von den Dreyecken DEF Fig. 56. und DGF Fig. 57. will ich Ihnen nun sagen, daß DF in beyden gleich, und ausserdem auch DE gleich DG, und GF gleich EF ist. Was müßten Sie nun thun, wenn Sie auf eine ähnliche Art beweisen wollten, daß die ganzen Dreyecke gleich sind?

S. Ich müßte sie auch so an einander legen, daß zwey gleiche Seiten sich deckten.

L. Legen Sie also die beyden gleichen Seiten DF auf einander, und die Dreyecke neben einander? Fallen hier die Seiten GF und EF auch in eine gerade Linie? (Zwey papierne Dreyecke, wie Fig. 56 und 57, wurden zum wirklichen Aneinanderlegen gegeben.)

S. Nein.

L. Was entsteht hier für eine Figur?

S. Ein

S. Ein Viereck.

L. Fig. 58 sehen Sie es gezeichnet. Was können Sie dabey für eine Regel befolgen?

S. Die erste, ich kann von E bis G eine gerade Linie ziehen.

L. So entstünde also die 59ste Figur. Betrachten Sie die darin enthaltenen Dreyecke genau.

S. Da habe ich wieder ein gleichschenkliges Dreyeck, das Dreyeck DEG.

L. Nur eins?

S. — — Das Dreyeck EFG ist auch gleichschenklig.

L. Was wissen Sie also von den Winkeln?

S. Der Winkel DEG ist gleich dem Winkel DGE, und der Winkel FEG gleich dem Winkel FGE.

L. Sie haben zwey Paare gleicher Winkel. Können Sie nicht hier eine von Ihren zwölf Regeln anwenden?

S. Ja die fünfte.

L. Also ist?

S. Der Winkel DEG und der Winkel FEG zusammen genommen den Winkeln DGE und FGE zusammen genommen gleich.

L. Das heißt, der Winkel DEF ist gleich dem Winkel DGF; und nun?

S. Nun sind die ganzen Dreyecke DEF und GEF gleich, denn es sind darin zwey Sei-

ten und die Winkel, welche sie einschliessen, gleich.

L. Welche?

S. DE ist gleich DG, EF gleich FG und der Winkel DEF gleich dem Winkel DGF.

L. Nun sey endlich in den beyden Dreyecken Fig. 60 und 61 HI gleich HI, HK gleich HL, und KI gleich LI. Versuchen Sie wieder beyde an einander zu legen, aber so, daß die Seiten HI auf einander zu liegen kommen. (Es werden wieder zwey papierne Dreyecke, den Dreyecken Fig. 60 und 61 gleich und mit eben den Buchstaben bezeichnet, zum Aneinanderlegen gegeben) Was entsteht nun für eine Figur?

S. Das weiß ich nicht zu sagen, eine solche Figur (zeigt die papiernen Dreyecke) haben wir noch nicht gehabt, sie hat drey Ecken und einen Winkel. Wie nennt man sie denn?

L. Um den Namen haben wir uns eben nicht nöthig zu bekümmern. Ohne ihn zu verstehen, können Sie Sich höchstens ihn merken. Man nennt dergleichen Figuren Vierecke mit einem erhabenen Winkel. — — Dadurch also, daß wir auf die verlangte Art die Dreyecke Fig. 60 und 61 an einander legen, erhalten wir die 62ste Figur. Wollen Sie dieselbe unverändert lassen?

S. Ich könnte nach der ersten Regel von K bis L eine gerade Linie ziehen.

L. Wenn

L. Wenn wir es thun, so erhalten wir die 63ste Figur. Giebt es da etwa auch wieder gleichschenklige Dreyecke?

S. In das Dreyeck HKL und das Dreyeck IKL.

L. Gut! Was haben wir also für gleiche Winkel?

S. Die Winkel HKL und HLK sind gleich, und die Winkel IKL und ILK ebenfalls.

L. Zwey Paare gleicher Winkel! fällt Ihnen nicht eine Regel ein?

S. Ja die 5te, die ich vorher befolgen mußte.

L. Keine weiter?

S. (Sieht die Regeln durch) Auch die 6te kann ich anwenden.

L. Und welche wird hier die beste seyn?

S. Die 6te; denn der Winkel HKL weniger dem Winkel IKL ist darnach dem Winkel HLK weniger dem Winkel ILK gleich, und das ist eben so viel, als der Winkel HKI ist gleich dem Winkel HLI. Es sind aber auch die Seiten HK und HL, und ferne IK und IL gleich, und also die ganzen Dreyecke HKI und HIL einander gleich.

L. Haben wir also, um zu beweisen, daß zwey Dreyecke, deren Seiten einander gleich sind, so sich gleichen, daß sie sich decken, haben wir, sage ich, dazu schlechterdings nöthig, die Dreyecke auf einander zu legen, wie wir gestern thaten?

S. Nein,

S. Nein, wir können es schon sehen, wenn wir sie nur an einander legen.

L. Müssen wir aber dazu nicht bisweilen auch noch Hülfslinien ziehen?

S. Ja.

L. Wenn?

S. Wenn beyde Dreyecke ein Viereck machen, nachdem man sie an einander gelegt hat.

L. Was für einen Satz von denen, die die Dreyecke betreffen, und von mir durchgenommen worden sind, ist bey diesem zweyten Beweise vorzüglich nöthig?

S. Daß in einem gleichschenkligen Dreyecke die Winkel über der Grundlinie gleich sind.

L. Welcher Beweis scheint Ihnen leichter zu seyn? der heutige oder der gestrige?

S. Der heutige.

L. Warum dieser?

S. Es sind da nicht so viel Fälle, und auch sonst scheint er mir nicht so schwer.

L. Sie haben ganz recht geurtheilt. Bey dem gestrigen Beweise hatten wir auch den Satz nöthig: In einem gleichschenkligen Dreyecke sind nach Verlängerung der Schenkel die Winkel unter der Grundlinie gleich, und daher ist er schwerer. — — Nun werden wir fürs erste noch nicht weiter gehen, sondern alles noch einmal wiederholen. Es wird den Nutzen haben, daß wir darauf mit desto stärkern Schritten fortgehen können.

1.
3
6.
9.
a b
14
15
d e f
19.
a c b d
A
22
B
G
27.
H F
K
2.
L
A 32 B
A
31
D E
B C
D
34.
A B
E

S. Nein, wir können es schon sehen, wir sie nur an einander legen.

L. Müssen wir aber dazu nicht bis auch noch Hülfslinien ziehen?

S. Ja.

L. Wenn?

S. Wenn beyde Dreyecke ein Viereck chen, nachdem man sie an einander gelegt

L. Was für einen Satz von denen, di Dreyecke betreffen, und von mir durchge men worden sind, ist bey diesem zweyten Be se vorzüglich nöthig?

S. Daß in einem gleichschenkligen D ecke die Winkel über der Grundlinie gleich s

L. Welcher Beweis scheint Ihnen leic zu seyn? der heutige oder der gestrige?

S. Der heutige.

L. Warum dieser?

S. Es sind da nicht so viel Fälle, und au sonst scheint er mir nicht so schwer.

L. Sie haben ganz recht geurtheilt. B dem gestrigen Beweise hatten wir auch de Satz nöthig: In einem gleichschenkligen Dre ecke sind nach Verlängerung der Schenkel di Winkel unter der Grundlinie gleich, und dahe ist er schwerer. — — Nun werden wir fürs erste noch nicht weiter gehen, sondern alles noch einmal wiederholen. Es wird den Nutzen haben, daß wir darauf mit desto stärkern Schritten fortgehen können.

1.
2
3
5
7
9.
10.
11
12
15
16
17.
19.
20
21
22
23.
24
27.
28
29.
31
32
33.
34.
36
37.

S. Nein, wir können es schon sehen, wenn wir sie nur an einander legen.

L. Müssen wir aber dazu nicht bisweilen auch noch Hülfslinien ziehen?

S. Ja.

L. Wenn?

S. Wenn beyde Dreyecke ein Viereck machen, nachdem man sie an einander gelegt hat.

L. Was für einen Satz von denen, die die Dreyecke betreffen, und von mir durchgenommen worden sind, ist bey diesem zweyten Beweise vorzüglich nöthig?

S. Daß in einem gleichschenkligen Dreyecke die Winkel über der Grundlinie gleich sind.

L. Welcher Beweis scheint Ihnen leichter zu seyn? der heutige oder der gestrige?

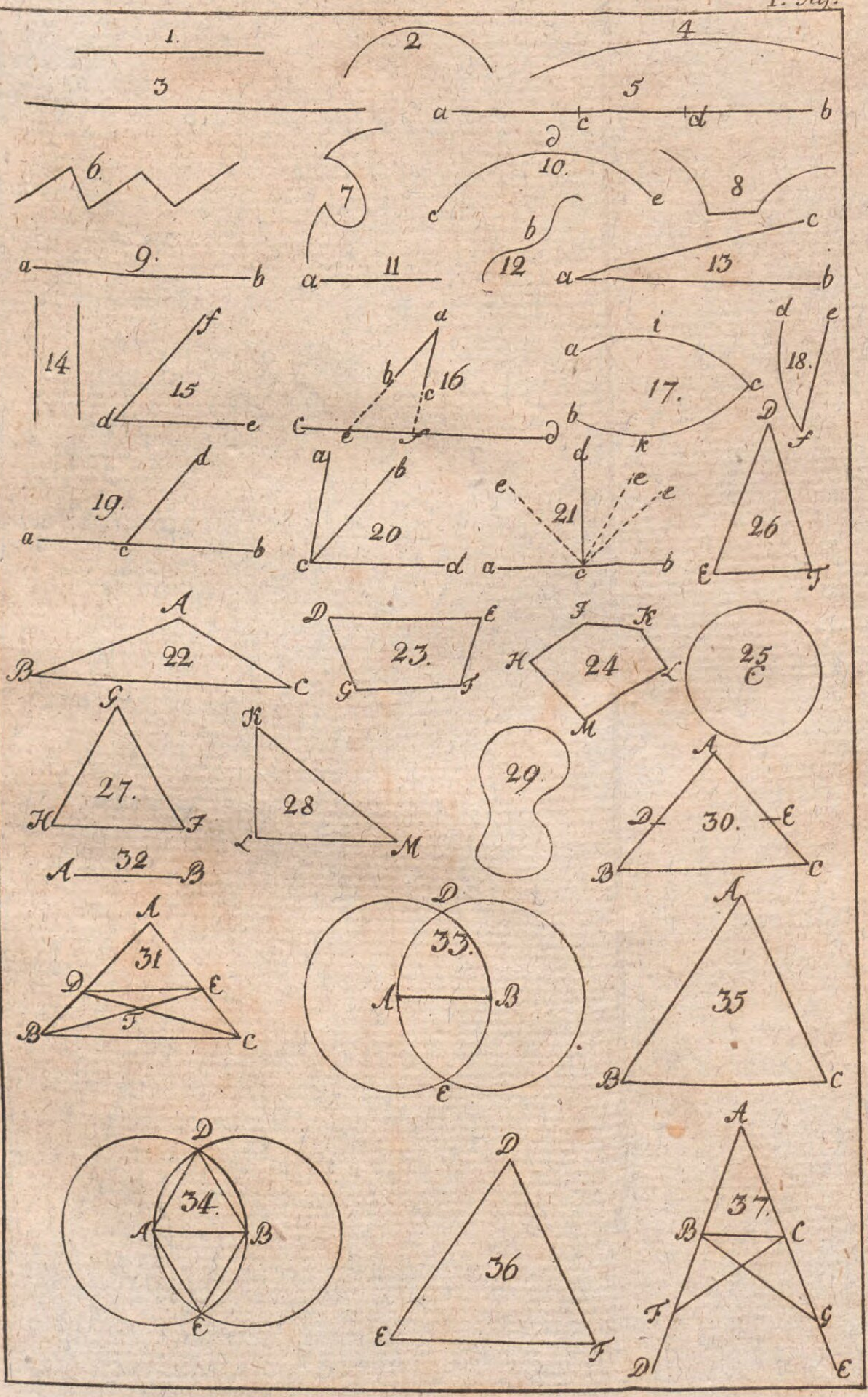
S. Der heutige.

L. Warum dieser?

S. Es sind da nicht so viel Fälle, und auch sonst scheint er mir nicht so schwer.

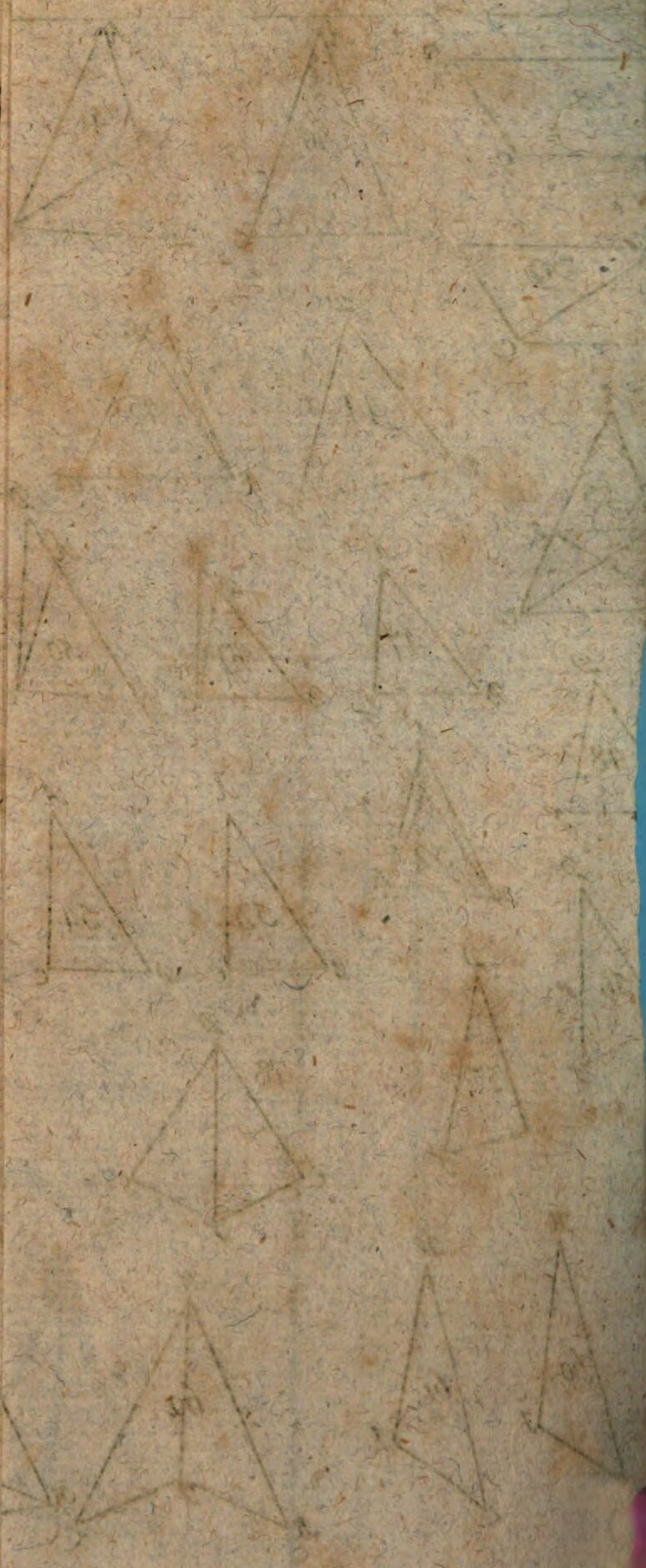
L. Sie haben ganz recht geurtheilt. Bey dem gestrigen Beweise hatten wir auch den Satz nöthig: In einem gleichschenkligen Dreyecke sind nach Verlängerung der Schenkel die Winkel unter der Grundlinie gleich, und daher ist er schwerer. — — Nun werden wir fürs erste noch nicht weiter gehen, sondern alles noch einmal wiederholen. Es wird den Nutzen haben, daß wir darauf mit desto stärkern Schritten fortgehen können.

1.
2
3
4
5
a c d b
6.
7
10.
c e
8
b
9.
a b
11
a
12
13
a c b
14
15
f d e
16
a b c C e f D
17.
a i c b k
18.
d e f
19.
a c b d
20
a b c d
21
d e e e a c b
26
D E F
22
A B C
23.
D E G F
24
F K H L M
25
E
27.
G H F
28
K L M
29.
30.
A D E B C
32
A B
31
A D E F B C
33.
D A B E
35
A B C
34.
D A B E
36
D E F
37.
A B C F G D E


1.
2
3
4
5
6.
7
8
9.
10.
11
12
13
14
15
16
17.
18.
19.
20
21
22
23.
24
25
26
27.
28
29
30.
31
32
33.
34.
35
36
37.

38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63

38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63



Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann Andreas Christian,

Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie

Bd.: [1]

Berlin (1781)

Math.p. 355 t-1/3,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082419-7
VD18 90034333